Editoriaal

De trouwe lezer van dit tijdschrift zal opgemerkt hebben dat het toch wel een heel poosje geleden is sinds er nog een nummer in de bus gevallen is (zelfs rekening houdend met het feit dat de redactie uit wiskundigen bestaat, die af en toe wel eens van een andere planeet lijken te komen, en er daardoor misschien een andere tijdsbeleving op na houden). Misschien heeft hier en daar al iemand het vermoeden (zonder bewijs) geponeerd dat QED niet meer bestaat, of toch wel een behoorlijk imaginair karakter aan het krijgen is.

Vandaag kunnen we verheugd aankondigen dat QED er weer staat! "We" zijn in de eerste plaats de twee kersverse voorzitters van QED en schrijvers van dit editoriaal, maar natuurlijk ook alle medewerkers (voor of achter de schermen) die we bij deze voor hun inzet bedanken. Om onze bewering van een bewijs te voorzien brengen we niet enkel dit exemplaar van ons tijdschrift, maar kondigen we ook een nieuwe activiteit aan in samenwerking met de studentenvereniging PRIME.

Onze vereniging volgt hiermee de trend van de inschrijvingscijfers van de opleiding wiskunde aan onze universiteit, die na enkele magere jaren een onverhoopte opleving kent. (Nu nog hopen dat de economie volgt.) Hoewel het voorbarig zou zijn om hierover gefundeerde uitspraken te doen, valt niet te ontkennen dat deze opleving volgt op verschillende initiatieven (o.a. de sensibiliserings-activiteiten en het zogenaamde cursuscruisen) binnen onze opleiding wiskunde. Meer over deze vernieuwde dynamiek wordt verder in dit nummer uit de doeken gedaan.

En voor het geval de financiële crisis jullie zorgen baart: uiteraard hoeven jullie dit jaar geen lidgeld te betalen, want in tegenstelling tot banken willen wij jullie geen lucht of andere afgeleide producten verkopen.

TDM, HV

Mikhail “Misha” Gromov wint de Abelprijs 2009

Voor wie het nog niet zou weten: de wiskunde heeft geen Nobelprijs. Hoewel we reeds jarenlang de prestigieuze Fields Medailles kennen, heeft de Academie voor Wetenschap en Letteren van Noorwegen in 2002 beslist om een wiskundig equivalent van de Nobelprijs te creëren, met name de Abelprijs. Met deze prijs gaat een geldbeloning van NOK 6,000,000 gepaard (ongeveer €700,000). Dit jaar ging deze prijs naar de Russisch-Franse wiskundige Mikhail Gromov (Misha voor de vrienden).

In de toespraak van het Abel-comité werden drie specifieke gebieden benadrukt waarin Gromov essentiële vooruitgang heeft geboekt: globale Riemann meetkunde, symplectische meetkunde, en groepen met polynomiale groei. We lichten deze even wat nader toe.

Riemann meetkunde

> *Gromov played a decisive role in the creation of modern global Riemannian geometry. His solutions of important problems in global geometry relied on new general concepts, such as the convergence of Riemannian manifolds and a compactness principle, which now bears his name (“Gromov’s Compactness Theorem”).*

Riemann meetkunde is genoemd naar de Duitse wiskundige Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Riemann was zelf een student van de beroemde Carl Friedrich Gauss (1777–1855). In 1853 vroeg Gauss aan Riemann om een *Habilitationsschrift* voor te bereiden over de fundamenten van de meetkunde. Naar aanleiding hiervan ontwikkelde Riemann zijn theorie van hogere dimensies. Wanneer hij uiteindelijk in 1854 hierover een lezing gaf in Göttingen, onthaalde de wiskundegemeenschap zijn bevindingen met veel enthousiasme, en het werd één van de belangrijkste verwezenlijkingen in de meetkunde. Het was getiteld “Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen”, en werd in 1868 gepubliceerd.

Het vakgebied dat hieruit voortgroeide is de Riemann meetkunde. Het is de tak van de differentiaalmeetkunde die zogenaamde Riemann oppervlakken bestudeert: dit zijn gladde oppervlakken met een Riemann metriek, dit wil zeggen, met een inproduct op de raakruimte in elk punt, dat continu varieert van punt tot punt. Hieruit kan men dan lokaal de begrippen hoek, booglengte, oppervlakte en volume definiëren.

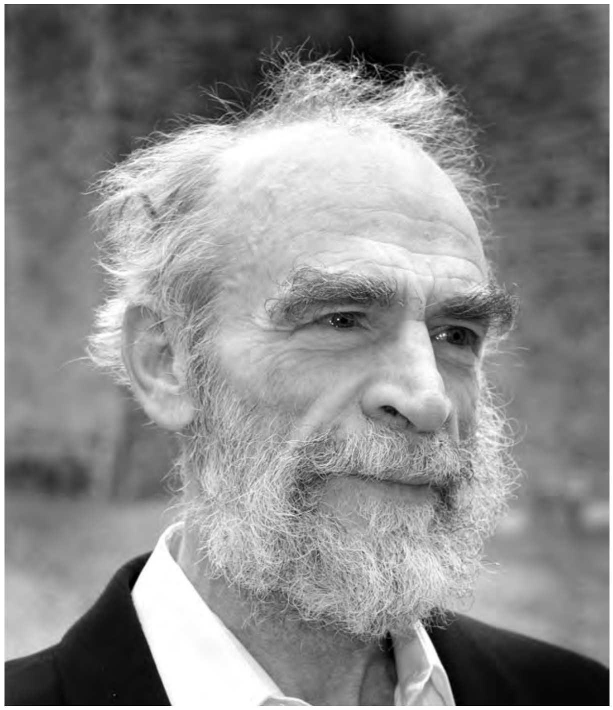
In de jaren 1980 introduceerde Gromov iets wat nu bekend staat als de Gromov-Hausdorff afstand tussen twee abstracte metrische ruimten. Deze afstand wordt gemeten door de twee ruimtes in te bedden in een derde grotere ruimte. Hausdorff had een dergelijke manier gesuggereerd om de afstand tussen twee ruimten te meten. Gromov bewees ondermeer twee fundamentele resultaten voor deze constructie, met name een precompactheidsstelling en een convergentiestelling.

Symplectische meetkunde

> *Gromov is one of the founders of the field of global symplectic geometry. Holomorphic curves were known to be an important tool in the geometry of complex manifolds. However, the environment of integrable complex structures was too rigid. In a famous paper in 1985, he extended the concept of holomorphic curves to J-holomorphic curves on symplectic manifolds. This led to the theory of Gromov-Witten invariants, which is now an extremely active subject linked to modern quantum field theory. It also led to the creation of symplectic topology and gradually penetrated and transformed many other areas of mathematics.*

Symplectische meetkunde is de tak van de differentiaalmeetkunde en differentiaaltopologie die zich toelegt op de studie van symplectische varieteiten, dit zijn differentieerbare variëteiten uitgerust met wat men een gesloten niet-ontaarde 2-vorm noemt. Symplectische meetkunde is ontstaan uit het Hamiltoniaans formalisme voor klassieke mechanica, waar de faseruimte van bepaalde klassieke systemen de structuur aanneemt van een symplectische variëteit. Symplectische meetkunde en Riemann meetkunde hebben overeenkomsten, maar ook verschillen. Zo hebben symplectische variëteiten, in tegenstelling tot Riemann variëteiten, geen lokale invarianten zoals kromming. Anderzijds heeft een symplectische variëteit bijkomende (topologische) eigenschappen; zo is bijvoorbeeld elke symplectische variëteit evendimensionaal en oriënteerbaar.

Gromov maakte gebruik van het bestaan van bijna-complexe structuren op symplectische variëteiten om een theorie te ontwikkelen van pseudo-holomorfe krommen, hetgeen geleid heeft tot heel wat vooruitgang in de symplectische topologie. Zo is er ondermeer een klasse van symplectische invarianten die nu bekend staat onder de naam Gromov-Witten invarianten; deze spelen ondermeer een belangrijke rol in de snarentheorie.



Groepen met polynomiale groei

> *Gromov's work on groups of polynomial growth introduced ideas that forever changed the way in which a discrete infinite group is viewed. He discovered the geometry of discrete groups and solved several outstanding problems. His geometrical approach rendered complicated combinatorial arguments much more natural and powerful.*

In de groepentheorie beschrijft de "groei" van een groep, met betrekking tot een vaste verzameling voortbrengers, de grootte van de ballen met straal n in het Cayley-graaf van de groep; hierbij bekijken we de groep in zekere zin als een meetkundig object. Elk element in de groep kan geschreven worden als een product van de voortbrengers, en in een welbepaalde zin vertelt de groei iets over het aantal elementen dat kan geschreven worden als product van n voortbrengers, voor toenemende waarden van n. Gromov bewees ondermeer de volgende stelling.

Stelling (Gromov 1981)**.** *Een eindig voortgebrachte groep heeft polynomiale groei als en slechts als hij virtueel nilpotent is.*

Zonder in detail te gaan op de precieze betekenis van deze stelling, willen we benadrukken dat de polynomiale groei een meetkundige voorwaarde is op het Cayley-graaf, terwijl het virtueel nilpotent zijn een louter algebraïsche uitspraak is over de groep. Het is niet al te moeilijk om aan te tonen dat een virtueel nilpotente groep polynomiale groei heeft; de kracht van de stelling is de omgekeerde implicatie. Gromov heeft hierbij meerdere nieuwe meetkundige concepten ingevoerd om de meetkundige informatie (polynomiale groei) te kunnen omzetten in een algebraïsche conclusie (virtueel nilpotent). Deze ideeën liggen aan de basis van heel wat van de huidige methoden om problemen in de meetkundige groepentheorie aan te pakken.

> *Mikhail Gromov is always in pursuit of new questions and is constantly thinking of new ideas for solutions of long-standing problems. He has produced deep and original work throughout his career and remains remarkably creative. The work of Gromov will continue to be a source of inspiration for many future mathematical discoveries.*

Referenties

[1] Arne B. Sletsjøe, The contributions of Mikhail Gromov, beschikbaar op `http://www.abelprisen.no/en/prisvinnere/2009/`.

TDM

Identiteiten met binomiaalcoëfficiënten

In het voorwoord van [1] schrijft Donald Knuth:

> *LONG AGO, I had run into the sum $\sum_k \binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}$, which takes the values 1, 4, 16, 64 for $n = 0, 1, 2, 3$ so it must be 4^n. Eventually I learned a tricky way to prove that it is indeed 4^n.*

Er lijkt inderdaad geen voor de hand liggend combinatorisch (want dat is toch de context waarin we binomiaalcoëfficiënten in de eerste plaats verwachten) argument te zijn om de identiteit

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k} = 4^n \tag{1}$$

aan te tonen (misschien kan een creatief QED-lid ons van het tegendeel overtuigen?). Met behulp van wat analyse (de cursus 'Analyse I' volstaat ruimschoots) kunnen we deze opgave echter op verrassende wijze als volgt oplossen.

Het product van twee convergente machtreeksen laat zich als volgt schrijven als een machtreeks:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)x^n.$$

We herkennen dezelfde structuur in de som $\sum_k \binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}$ als in de coëfficiënten van de laatste machtreeks: met $a_n = b_n = \binom{2n}{n}$ levert de voorgaande formule

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}\right]x^n. \tag{2}$$

Maar zoals Donald Knuth opmerkt, zijn de sommen voor kleine waarden van n juist gelijk aan 4^n, zodat we verwachten dat de voorgaande formule ook gelijk is aan $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$. Dit herkennen we dan weer als een meetkundige reeks, waarvan de reekssom $\frac{1}{1-4x}$ is (mits $|x|$ voldoende klein is). Nemen we van beide leden de vierkantswortel, dan vragen we ons dus eigenlijk af of

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\,. \tag{3}$$

Maar uit de analyse kennen we de binomiaalreeksontwikkeling (geldig als $|x|$ klein genoeg is)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

waaruit (voor $|x|$ klein genoeg)

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-4)^n x^n.$$

We kunnen nu eenvoudig nagaan dat inderdaad

$$\binom{-1/2}{n}(-4)^n = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4)^n$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}2^n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\frac{n!}{n!}2^n = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \binom{2n}{n}.$$

We besluiten dat formule (3) inderdaad geldt (als $|x|$ klein genoeg is), en dus ook na kwadrateren,

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n\right]^2 = \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n.$$

Maar voor zulke x hebben we ook formule (2), en we weten dat de coëfficiënten van een machtreeks (convergent in zekere omgeving van 0) uniek zijn. Door gelijkstellen van de coëfficiënten besluiten we dat formule (1) inderdaad geldt.

Nog verrassender is misschien wel dat deze, en nog heel wat andere identiteiten tegenwoordig d.m.v. een algoritme gevonden kunnen worden. (Wie ooit het vak *Computeralgebra* aan onze universiteit volgde, zal zich herinneren dat iets analoogs ook geldt voor het berekenen van onbepaalde integralen.) Donald Knuth vervolgt immers:

> *But had I known the methods in this book I could have proved the identity immediately.* [...] *No longer do we need to get a brilliant insight in order to evaluate sums of binomial coefficients, and many similar formulas that arise in practice; we can now follow a mechanical procedure and discover the answers quite systematically.*

Als we de instructies in [1] volgen en het zogenaamde Wilf-Zeilberger algoritme uitvoeren, dan vinden we inderdaad na enig rekenwerk (leve de computeralgebra-paketten) voor $F(n,k) := \frac{1}{4^n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}$ een recursiebetrekking van de vorm

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

waarbij $G(n,k) = -\frac{k(2n-2k+1)}{2(n+1)(n-k+1)}F(n,k)$. Ook zonder het algoritme te kennen kan die identiteit overigens d.m.v. eenvoudig (maar ietwat langdradig—leve de computeralgebra-paketten) rekenwerk geverifieerd worden. Daaruit volgt dat

$$\sum_{k=0}^{n+1} F(n+1,k) - \sum_{k=0}^{n+1} F(n,k) = \sum_{k=0}^{n+1}(G(n,k+1) - G(n,k)) = G(n,n+2) \quad (4)$$

waarbij, om precies te zijn, $F(n,k)$ en $G(n,k)$ voor $k > n$ recursief voortgezet worden, bijvoorbeeld door de betrekkingen (ook geldig voor $k \leq n$)

$$F(n,k+1) = \frac{(2k+1)(n-k)}{(2n-2k-1)(k+1)}F(n,k); \;\; G(n,k+1) = -\frac{2k+1}{2(n+1)}F(n,k).$$

Daardoor is $F(n,n+1) = 0$, en dus ook $G(n,n+2) = 0$, zodat formule (4) uitdrukt dat $\sum_{k=0}^{n} F(n,k)$ niet afhangt van de waarde van n. Vermits voor $n = 0$ de som triviaal 1 is, is $\sum_{k=0}^{n} F(n,k) = 1$, d.w.z., formule (1) geldt.

Aan wie wil weten hoe de algoritmen werken en welke identiteiten precies algoritmisch aangetoond kunnen worden, kunnen we het gratis te downloaden boek [1] warm aanbevelen.

Referenties

[1] M. Petkovšek, H. Wilf, D. Zeilberger, *A = B*, A. K. Peters, 1996. Elektronische versie vrij verkrijgbaar op `http://www.math.upenn.edu/~wilf/AeqB.html`.

HV

Sam & Silo by *Dumas*

Hoe populair is wiskunde studeren aan de UGent?

Toen ik 31 jaar geleden in de eerste kandidatuur zat, had ik ongeveer 120 medestudenten wiskunde. Een verwaarloosbaar en verwaarloosd groepje natuurkundigen verzonk voor sommige lessen bij ons in het niets, terwijl we zelf een kleine druppel waren op de hete ingenieursplaat. Men kan zich de vraag stellen: hoe zitten de verhoudingen heden ten dage? Met een recentelijk merkwaardig gebeuren voor ogen —waarover straks meer— zal ik mij in dit artikel toespitsen op de wiskunde en de natuurkunde —en de ingenieurs laten waar ze eigenlijk niet graag zijn, namelijk, *buiten beschouwing*.

De tijd van 120 beginnende wiskundestudenten lijkt voorbij. Let wel: tot die 120 behoorden vrij veel bissers. In de oertijd had je nog het *jaarsysteem*, en het daaraan gekoppelde systeem van de *vrijstellingen*. Voor de jongeren onder ons: het jaarsysteem wou dat iedere student(e) het ganse programma jaar per jaar doorliep, met dien verstande dat bij niet-slagen in ten minste één vak het ganse jaar moest opnieuw gedaan worden. Eventueel was de student(e) vrijgesteld van enkele vakken, namelijk van die vakken waarvoor hij/zij minstens een 14/20 had behaald. Er reeds vakken van het volgende jaar bijnemen, zat er niet in, want zo'n systeem bestond, althans officieel, niet. Voor de ouderen onder ons: heden ten dage leven we in een bijna volledig *creditsysteem*. Dit houdt ruwweg in dat zodra een 10/20 is gehaald voor een vak, dit vak levenslang wegvalt. Weggevallen vakken mogen elk jaar ingevuld worden met nieuwe, zolang het totaal aantal studiepunten op jaarbasis rond de 60 blijft. En elk vak vertegenwoordigt zo een vast aantal studiepunten, ongeveer evenredig met de *studielast*, of dat is toch het idee. Dit maakt dat, eenmaal je een vak dient opnieuw te doen, en een ander niet, je niet meer in een precies jaar zit, maar ergens in niemandsland, of beter, in *iedersland* vertoeft.

Tegenwoordig spreekt men over *generatiestudenten* om de eerstejaarsstudenten aan te duiden die voor de eerste keer wiskunde studeren. Het is elk jaar uitkijken hoeveel generatiestudenten er zullen zijn. Zo ook dit jaar. In feite waren we net iets meer nieuwsgierig dan anders, want vorig jaar zaten we in een dieptepunt en hebben we twee projecten opgestart om de instroom te proberen opkrikken.

Maar eerst de cijfers. Het dieptepunt van vorig jaar betrof 29 generatiestudenten. Dit jaar hebben we er 66. Deze ongelooflijke en markante stijging is een geïsoleerd fenomeen in Vlaanderen, laat dit al een gegeven zijn.

Dus algemene verklaringen, zoals "door de crisis kiezen jongeren minder voor industrieel-geöriënteerde beroepen en meer voor werkzekerheid in het onderwijs" gaan niet volledig op. Waren het onze projecten? Wat hebben we precies gedaan?

Vorig jaar zijn we eens gaan informeren, onder impuls van de toenmalige voorzitter van de opleidingscommissie Joris Van der Jeugt, bij de Nederlandse universiteit in Nijmegen hoe zij het tij van de slabakkende instroom hebben weten te keren. Want daar gaat het nu heel goed met het aantal generatiestudenten wiskunde. Van de pakweg twintig acties die zij doen, gaande van wiskunde-competities organiseren met prijzen als een reis naar New York, tot simpele aanwezigheidspolitiek op infobeurzen, hebben wij er twee uitgelicht en als proefproject geïmplementeerd. Het behelst het *cursuscruisen* (in Nederland heet dat *meelopen*) en een "vrije-ruimte-project", thans operationeel onder de naam "UniMath". Over het cursuscruisen vind je elders in dit blaadje meer uitleg. Het komt er op neer dat leerlingen van het middelbaar op een voor hen vrije dag reguliere cursussen wiskunde aan de unief kunnen meevolgen, een ganse of halve dag, begeleid door "echte" studenten wiskunde.

Het tweede project, UniMath, biedt vijf moderne onderwerpen aan die aanleiding geven tot onmiddellijke maar reëele toepassingen van de wiskunde in de praktijk. Lesgevers van de UGent (dit kunnen professoren, assistenten, postdocs of studenten zijn) komen driemaal twee lesuren op school lesgeven over dat onderwerp, en geven stof tot nadenken mee (dit gebeurt in het vrij onderwijs in de zogenaamde *vrije ruimte*, vandaar de vroegere naam van dit project). Op een groots opgezette slothappening komen alle betrokken leerlingen op een woensdag een namiddag *wiskunde beleven*. Vorig jaar was dit een soort wiskundige competitie/spel met als doel een kluis te proberen kraken. Het pilootproject bestond toen uit één onderwerp, namelijk "projectieve vlakken en codes", en dit was uiterst geschikt om het kluiskraken in te kleden.

Heeft dit bijgedragen tot de massale inschrijvingen? Volgens een recente enquête heeft het rechtstreeks *twee* inschrijvingen opgeleverd; de onrechtstreekse invloed is niet te meten. Het cursuscruisen zou verantwoordelijk zijn voor vijf bijkomende inschrijvingen. Dus niet echt de conclusie die we verwachtten of waarop we hoopten.

Desondanks blijft er die geweldige stijging die zich nergens anders voordoet. Het is ook uitzonderlijk in de tijd. Voor zover ik mij herinner, is dit nooit voorgekomen in de wiskunde aan de UGent. Weet je dat we nu meer eerstejaarsstudenten hebben in de wiskunde dan in de scheikunde? Volgens mij is dat al een uitzondering op zich. En de faculteit Wetenschappen stijgt in zijn geheel minder dan de richting Wiskunde, terwijl Wiskunde verantwoordelijk is voor één zesde van de totale stijging van het aantal generatiestudenten aan gans de Universiteit Gent!

Bekijken we de situatie samen met de natuurkunde, thans "Fysica en Sterrenkunde", dan wordt het nog ongelooflijker. Tot 2004 werd de toenmalige eerste kandidatuur gezamenlijk ingericht voor wiskunde en natuurkunde. In die periode was het seizoen (of academiejaar) '93-'94 een topjaar met 126 eerstejaars (bissers inbegrepen), waarvan 15 IAJ'ers. Voor de jongsten onder ons en de oudsten onder ons: een IAJ is een Individueel Aangepast Jaarprogramma. Zulk een student vulde de leemte van de vrijstellingen op met vakken uit hogere jaren – op een officiële manier. In andere jaren draaide het aantal eerstejaars rond de honderd, tenzij de laatste jaren: vanaf het jaar 2000 waren het eerder 80 dan 100 studenten in de eerste kandidatuur Wis- en Natuurkunde. In het eerste jaar dat er een bachelor Wiskunde was (2004-2005), waren er 49 generatiestudenten. Nu dus 66.

Maar de Fysica en Sterrenkunde heeft een "boost" gekend door de naamsverandering. Daar waar in het verleden de natuurkunde steevast het kleine broertje was van de wiskunde qua studentenaantallen, is ze nu een volwaardige, soms grote broer geworden. Tot vorig jaar had de bachelor Fysica en Sterrenkunde meer generatiestudenten dan de bachelor Wiskunde. Tot nu dus. Samen zijn we echter nog altijd goed voor 118 generatiestudenten. En het moet meer dan 20 of 30 jaar geleden zijn dat dit cijfer nog werd gehaald. Ik denk zelfs dat er in mijn jaar, 1978, minder generatiestudenten wiskunde en natuurkunde waren.

Dus toch een historisch jaar waarin we nu verzeild zijn! Als je alle studenten Wiskunde en Fysica en Sterrenkunde samentelt (dus iedere student die in dat jaar minstens één vak volgt), dan komen we dit jaar uit bij een aantal dat boven de 140 ligt, en dergelijke cijfers hebben we al lang niet meer gezien… Vooroorlogse toestanden, zo zou je het kunnen noemen, zonder veel te overdrijven.

Het is natuurlijk bang afwachten of deze trend volgend jaar bevestigd wordt. Maar we hopen alvast van wel. En als het van onze acties afhangt, dan zeker!

HVM

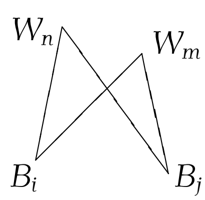
QED
EN PRIME
NODIGEN U UIT OP DE
LEZING: PARADOXEN
BART WINDELS vertelt over
EEN KWAAL VOOR AL WIE KAN EN DURFT DENKEN
MAANDAG 16 NOVEMBER 2009
COMA-proclamatie: 17.30h
Lezing: 18.00h
Auditorium Emmy Noether, gebouw S25
Campus De Sterre
De volgende zin is waar. De vorige zin is vals. Ze intrigeren ons al eeuwen, dus komt Bart Windels op zijn onnavolgbare, enthousiaste manier duidelijkheid scheppen in de wereld der paradoxen.
De lezing wordt voorafgegaan door de proclamatie van de COMA, de programmeerwedstrijd die jaarlijks georganiseerd wordt door PRIME. In een korte ceremonie worden de laureaten bekendgemaakt en krijgt de beste student zijn prijs.
Tussen de proclamatie en de lezing is er een hapje en een drankje voorzien, met brownies van Quetzal. Na de lezing verzorgt QED, de vereniging van oud-studenten wiskunde aan UGent, een receptie.
Quetzal
DE CHOCOLADEBAR
DK SPAARBANK
TEXAS INSTRUMENTS
PRINTING SHOP graphics
www.ajuinlei27.be
V.U. Bart Seghers, Karel de Flousstraat 79, 8000 Brugge

Problem solving: het extremaalprincipe

Bij het oplossen van wiskundige problemen kan het geregeld wel eens van pas komen om het zogenaamde extremaalprincipe toe te passen; in essentie betekent dit niet meer of minder dan het bekijken van de "meest extreme situatie" die zich kan voordoen of zou moeten kunnen voordoen. Als je ooit om een of andere reden het niet bestaan van bepaalde objecten wil aantonen, bijvoorbeeld van het maximum van een verzameling, zal deze techniek zeker een nuttig hulpmiddel zijn. Enkele voorbeelden zullen wellicht veel verduidelijken.

Probleem. Gegeven zijn n boerderijen en n waterputten die over het vlak verspreid zijn. Het is de bedoeling om een rechte weg van elke boerderij naar juist 1 waterput aan te leggen. Bewijs dat de waterputten bijectief aan de boerderijen kunnen toegewezen worden, zodat geen twee wegen elkaar snijden. (Er zijn nooit 3 objecten die op dezelfde rechte liggen.)

Oplossing. Onder alle $n!$ wegennetten beschouwen we het exemplaar met de kleinste som der lengtes van alle wegen (dit is dus onze "meest extreme situatie"). Stel dat in deze bijectie twee wegen elkaar snijden (noem ze B_iW_m en B_jW_n). Vervangen we deze twee snijdende wegen door B_iW_n en B_jW_m, dan verkrijgen we een weggennet dat een kleinere totale lengte heeft door de driehoeksongelijkheid (zie figuur), contradictie. Het beschouwde wegennet heeft dus geen snijdende wegen.

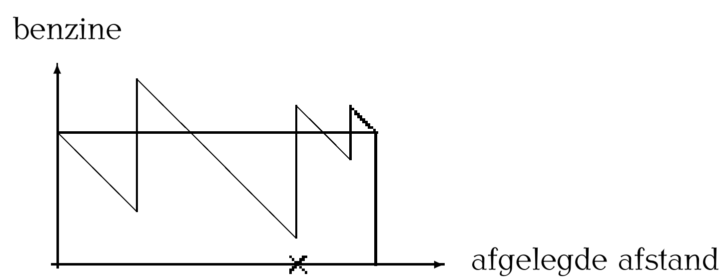


Probleem. Er staan n mensen in een veld, elk op een verschillende afstand van elkaar. Iedere persoon heeft een geladen pistool en richt dit naar de persoon die het dichtste bij hem staat. Iedereen schiet op hetzelfde ogenblik. Bewijs dat er steeds iemand in leven blijft als n oneven is.

Oplossing. Beschouw de twee mensen die op de kleinst mogelijke afstand van elkaar staan. Deze twee mensen schieten uiteraard op elkaar. Stel dat geen van beiden doelwit is van de overige $n-2$ mensen in het veld, dan laten we deze twee mensen buiten beschouwing, en kijken we naar de $n-2$ overige mensen. Zo verminderen we stap voor stap het aantal mensen met 2, tot we plots een tweetal A en B krijgen waarvan persoon A ook het doelwit is van een van de overige mensen. Deze stap moet voorkomen, aangezien n oneven is, en we door telkens te verminderen met 2 nooit 0 kunnen bereiken. In dat geval zullen twee kogels persoon A treffen, en zal er dus zeker iemand zijn die geen kogels ontvangt.

Probleem. De exacte hoeveelheid benzine die nodig is om met een bepaalde auto een enkel rondje te doen op een parcours, is verdeeld over n containers die langs het parcours geplaatst zijn. Bewijs dat er een startpositie bestaat waar de auto, beginnende met een lege benzinetank, een volledig rondje kan maken over het parcours zonder stil te vallen. (De containers mogen onregelmatig verdeeld zijn over het parcours en de benzine mag onregelmatig verdeeld zijn over de containers.)

Oplossing. We laten de auto (met voldoende benzine) één rondje rijden over het parcours en laten hem bij elke container langs het parcours bijtanken. Na dit rondje heeft de auto evenveel benzine aan boord als bij aanvang. Iedere plaats op het parcours waar zijn benzinestand minimaal was, is een goede startpositie, want zijn benzinestand zal nooit lager zijn dan de stand op die plaats (zie figuur).



Problemen

Als dit principe je wel wat lijkt en je er nog niet genoeg van hebt, kan je nu zelf aan de slag om het in de praktijk om te zetten …

1. Elk roosterpunt van een $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rooster krijgt een natuurlijk getal toegekend. Elk van die getallen is het rekenkundig gemiddelde van zijn 4 buren. Toon aan dat alle getallen gelijk zijn.

2. In een groep van n personen zijn er steeds twee die binnen deze groep evenveel vrienden hebben. (Vriendschap is wederkerig verondersteld.)

3. Los de vergelijking $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ op in gehele getallen.

4. Zoek alle reële oplossingen van het stelsel

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= z \,, \\
(x+z)^3 &= y \,, \\
(y+z)^3 &= x \,.
\end{aligned}
$$

5. Op een feest heeft elke gast hoogstens 3 vijanden. Bewijs dat we de groep in twee kamers kunnen plaatsen zodat iedereen hoogstens 1 vijand heeft in zijn eigen kamer.

6. Toon aan dat er in elke configuratie van n punten in het vlak, niet allemaal collineair, steeds een rechte bestaat die exact twee van de gegeven punten bevat.

7. Van $2n + 3$ punten in het vlak zijn er geen 3 collineair, en liggen er geen 4 op een cirkel. Bewijs dat we 3 punten kunnen kiezen zodat er voor de cirkel door deze 3 punten exact n punten binnen en n punten buiten de cirkel liggen.

Jan Vonk