Editoriaal

Op het moment van het schrijven van dit editoriaal is het stralend weer, veel te warm eigenlijk om een editoriaal te schrijven. We hebben er opnieuw een boeiend academiejaar opzitten, en we stomen ons (vrij letterlijk) al weer klaar voor het volgende, hopelijk even boeiende jaar.

We zijn er in geslaagd om jullie nog voor de vakantie dit nieuwe boekje te bezorgen, en we hopen natuurlijk dat je een klein deeltje van de luie vakantiedagen zal benutten om alle artikels in dit 37e "Tussen Haakjes" helemaal uit te lezen en alle vermeldde wiskundeproblemen op te lossen. Ook als je toch net iets minder ambitieus bent, zal je ongetwijfeld genieten van het leesmateriaal. We bezorgen jullie onder meer nieuws over de Abelprijs 2010, laten jullie kennismaken met de schoonheid van de priemgetallen, en vertellen jullie over een zeer geslaagd onderwijsproject waarin we als universiteit zelf naar het middelbaar onderwijs toegestapt zijn om mooie maar toch recente wiskunde op een aangename manier te gaan voorstellen: UniMath.

We maken van de gelegenheid gebruik om jullie nog eens te herinneren aan onze oproep om jullie gegevens online in te geven op de QED website `http://qed.ugent.be/gegevens`. Vanaf volgend academiejaar willen we ons volledig op die gegevens baseren om onze leden te bereiken, en we hopen dan ook van harte dat jij (ja, jij, lezer!) tot onze leden blijft behoren.

We kunnen je dit boekje nog steeds kostenloos aanbieden, maar onze reserves beginnen toch wat leeg te lopen (zij het niet met een even grote vaart als het olielek in de Golf van Mexico). Om onze kosten te dekken zullen we vanaf volgend academiejaar een jaarlijkse bijdrage van een schamele 5 euro vragen; we zijn ervan overtuigd dat jullie dit niet zal weerhouden om oud-student te blijven (want geef toe, eens je geen oud-student meer wil zijn ben je wel écht oud aan het worden ...)

TDM, HV

John Tate wint de Abelprijs 2010

De Abelprijs werd in 2002 door de Noorse Academie voor Wetenschap en Letteren in het leven geroepen als antwoord op het ontbreken van een Nobelprijs voor de wiskunde. Dit jaar mocht de 85-jarige Amerikaanse wiskundige John Tate de 6 000 000 Noorse kronen (ongeveer EUR 730 000) incasseren voor zijn bijdragen aan de getaltheorie.

Als kind was hij al gefascineerd door wiskundige puzzels en hij verslond de boeken van zijn vader, een hoogleraar in de fysica. Zelf begon hij ook eerst aan de universiteit van Princeton natuurkunde te studeren, maar al tijdens zijn eerste jaar besefte hij dat zijn ware interesse bij de wiskunde lag. Tijdens zijn carrière was hij verbonden aan de universiteiten van Princeton, Columbia, Harvard en Texas.

Zijn eerste belangrijke werk betreft de veelgeciteerde *Tate's thesis* uit 1950. Hierin voegde hij originele inzichten toe aan de theorie van de L-functies over getallenvelden door een nieuw bewijs te geven van een stelling van Hecke door middel van abstracte Fourier-analyse. Dit werk wordt als grondleggend beschouwd voor de moderne benadering van L-functies.

De alomtegenwoordigheid van Tate in de getaltheorie van de twintigste eeuw blijkt alleen al uit de diversiteit aan wiskundige ideeën die zijn naam dragen: Tate-cohomologie, de dualiteitsstelling van Tate, Barsotti-Tate-groepen, het Tate-motief, de Tate-module, het algoritme van Tate voor elliptische krommen, de Néron-Tate hoogte op Mordell-Weil-groepen van abelse variëteiten, de Mumford-Tate-groepen, de isogeniestelling van Tate en de stelling van Tate-Honda voor abelse variëteiten over eindige velden, Serre-Tate-deformatietheorie, Tate-Shafarevich-groepen, Hodge-Tate-decomposities, de Tate-cyclus, de Lubin-Tate-groep, ...

In lekentaal: veel van de grote onderzoeksprogramma's in de algebraïsche getaltheorie en de arithmetische meetkunde zijn maar mogelijk door de diepe inzichten van John Tate. Door zijn getaltheoretische bijdragen aan de theorie van de elliptische krommen kunnen we stellen dat Tate onrechtstreeks bijgedragen heeft tot bijvoorbeeld het oplossen van het Laatste Vermoeden van Fermat (uiteindelijk bewezen door Andrew Wiles in 1995) en tot de encryptie-algoritmen die gebruikt worden om op een veilige manier gegevens door te sturen via het internet.

QED-leden die net naast de prijzen grepen, hoeven niet te wanhopen: in augustus dit jaar is er immers nog het wereldcongres van de wiskunde in Hyderabad (India), waar de Fields Medailles (die andere prijs die de naam 'Nobelprijs voor de wiskunde' waardig is) uitgereikt worden. Houd er wel rekening mee dat de leeftijdsgrens voor de Fields Medailles op 40 jaar gesteld is. Gelukkig heeft Tate een aantal befaamde raadsels nagelaten zoals het vermoeden van Sato-Tate over families van elliptische krommen [1] en het vermoeden van Tate [2] dat als een analogon van het vermoeden van Hodge beschouwd wordt (een van de zogenaamde Millennium Prize Problems [3]). In een interview naar aanleiding van de prijsuitreiking blijft Tate er zelf zeer bescheiden onder:

> *I am maybe a theory builder or a conjecture maker, not a conjecture prover very much. It's true, I am not good at solving problems. I would never be good in the Olympiad, for example. Of course, there the speed counts. I am certainly not a speedy worker. That's one beautiful thing about mathematics: it doesn't matter how long you take, if you end up with a good result.*

Referenties

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Sato-Tate_conjecture`

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Tate_conjecture`

[3] `http://www.claymath.org/millennium/Hodge_Conjecture/`

HV

De oneindige schoonheid van de priemgetallen

Elke wiskundige twijfelt er niet aan dat er oneindig veel priemgetallen zijn …ja toch? Maar wist je dat er heel wat leuke bewijzen van dit feit bestaan? We presenteren er hier een aantal, en de gebruikte methoden komen uit alle hoeken en kanten: uiteraard de getaltheorie zelf, maar ook combinatoriek en zelfs topologie. Geniet mee met ons van de schoonheid van de oneindigheid.

Het oorspronkelijk bewijs van Euclides

Het bewijs dat Euclides gaf van de oneindigheid van het aantal priemgetallen, is wellicht het meest beroemde. Veronderstel dat er slechts eindig veel priemgetallen zijn, en nummer ze als $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Beschouw nu het getal

$$k = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1\,.$$

Elk getal is deelbaar door minstens één priemgetal; kies dus een priemdeler p van k. Dan moet $p = p_i$ voor een zekere $i \in \{1, \ldots, N\}$. Maar dan is $p \mid k$, terwijl ook $p = p_i \mid k - 1$; bijgevolg is $p \mid 1$, en dit is een contradictie.

Bewijs via Fermat getallen

Een ander getaltheoretisch bewijs maakt gebruik van de Fermat getallen

$$F_n = 2^{2^n} + 1\,.$$

We tonen eerst aan dat

$$F_0 \cdot F_1 \cdots F_{n-1} = F_n - 2 \tag{1}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. Inderdaad, voor $n = 1$ hebben we $F_0 = F_1 - 2$, want $F_0 = 3$ en $F_1 = 5$. Stel dat de vergelijking (1) geldt voor $n - 1$; dan hebben we

$$\begin{aligned} F_0 \cdot F_1 \cdots F_{n-1} &= (F_0 \cdot F_1 \cdots F_{n-2}) \cdot F_{n-1} \\ &= (F_{n-1} - 2) \cdot F_{n-1} \\ &= \left(2^{2^{n-1}} - 1\right) \cdot \left(2^{2^{n-1}} + 1\right) \\ &= 2^{2^n} - 1 = F_n - 2\,. \end{aligned}$$

Bijgevolg geldt (1) ook voor n, en per inductie geldt de formule voor alle n.

We leiden hieruit nu af dat elke twee verschillende Fermat getallen onderling ondeelbaar zijn. Inderdaad, veronderstel dat er een $m < n$ en een $t > 1$ bestaan zodat $t \mid F_m$ en $t \mid F_n$. Dan volgt uit (1) dat

$$F_n - 2 = F_0 \cdot F_1 \cdots F_m \cdots F_{n-1} \, ,$$

maar dan zijn zowel F_n als $F_n - 2$ deelbaar door t. Hieruit volgt dat $t \mid 2$ en dus $t = 2$. Maar uiteraard is elk Fermat getal oneven, en dus bekomen we een contradictie.

We bekomen dus een oneindige verzameling van getallen, namelijk

$$A = \{F_0, F_1, F_2, \dots\} \, ,$$

met de eigenschap dat elke twee verschillende getallen van A onderling ondeelbaar zijn. Aangezien elk getal door minstens één priemgetal deelbaar is, besluiten we dat er ook oneindig veel priemgetallen zijn.

Een topologisch bewijs

Het volgend topologisch bewijs werd gevonden door H. Fürstenberg. Zoals je je al dan niet herinnert, is een topologische ruimte een verzameling X samen met een collectie van deelverzamelingen, die de *open* deelverzamelingen worden genoemd, en die voldoen aan twee basiseigenschappen:

- Elke unie van open verzamelingen is open;
- Elke *eindige* doorsnede van open verzamelingen is open.

We noemen een deelverzameling $S \subseteq X$ *gesloten* als zijn complement $X \backslash S$ open is; voor gesloten deelverzamelingen gelden dus de complementaire eigenschappen, m.a.w. elke doorsnede van gesloten verzamelingen is gesloten, en elke *eindige* unie van gesloten verzamelingen is gesloten.

We definiëren nu een topologie op de verzameling $\mathbb{Z}$ als volgt. Vooreerst stellen we voor elke $a, b \in \mathbb{Z}$ met $b > 0$

$$N_{a,b} = \{a + nb \mid n \in \mathbb{Z}\} \, .$$

We stellen nu dat een deelverzameling $S \subseteq \mathbb{Z}$ open is, dan en slechts dan als voor elke $a \in S$ geldt dat er een $b \in \mathbb{Z}_{>0}$ bestaat zodat $N_{a,b} \subseteq S$. In het bijzonder is elke niet-ledige open verzameling oneindig. Merk ook op dat

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b} \,,$$

en dus is elke $N_{a,b}$ ook gesloten, want het is het complement van een open verzameling.

Nu komt de aap (bijna) uit de mouw. Elk geheel getal verschillend van -1 en 1 heeft minstens één priemdeler, en behoort dus tot een zekere $N_{0,p}$ voor een priemgetal p. Bijgevolg is

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ priem}} N_{0,p} \,.$$

Als er slechts eindig veel priemgetallen zouden zijn, dan zou het rechterlid een *eindige* unie van gesloten verzamelingen zijn, en dus zelf gesloten zijn. Dus is het linkerlid gesloten, maar dan is het complement $\{-1, 1\}$ open; dit is een contradictie, want elke niet-ledige open verzameling is oneindig in onze topologie.

Bewijs met het inclusie-exclusie principe

Het inclusie-exclusie principe is een formule uit de combinatoriek, die je vertelt hoe je het aantal elementen van een (eindige) unie van verzamelingen kan bepalen, gebruik makend van hun onderlinge doorsnedes:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| .$$

We werken opnieuw vanuit het ongerijmde, en we veronderstellen dus dat er eindig veel priemgetallen $p_1, p_2, \ldots, p_N$ zijn. Stel nu

$$a = 1 - \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right);$$

dan is uiteraard $0 < a < 1$; anderzijds is

$$a = \sum_{i=1} \frac{1}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{p_i p_j p_k} - \cdots + (-1)^{N+1} \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_N} .$$

Zij nu x een willekeurig reëel getal met $x > 1$, en beschouw het interval $[1, x]$. Stel voor elke $i \in \{1, \ldots, N\}$

$$A_i(x) = \{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] \mid p_i \text{ deelt } n\};$$

merk op dat

$$\bigcup_{i=1}^{N} A_i(x) = \mathbb{N} \cap [2, x] .$$

Het aantal gehele getallen in het interval $[1, x]$, namelijk $\lfloor x \rfloor$, kunnen we nu uitdrukken met behulp van het inclusie-exclusie principe toegepast op de verzamelingen $A_i(x)$:

$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor = 1 + \sum_{i=1}^{N} \left\lfloor \frac{x}{p_i} \right\rfloor - \sum_{1 \le i<j \le N} \left\lfloor \frac{x}{p_i p_j} \right\rfloor + \sum_{1 \le i<j<k \le N} \left\lfloor \frac{x}{p_i p_j p_k} \right\rfloor \\ - \cdots + (-1)^{N+1} \left\lfloor \frac{x}{p_1 p_2 \cdots p_N} \right\rfloor .\end{aligned}$$

Als we hierin nu beide leden vermenigvuldigen met x^{-1}, en de limiet $x \to \infty$ beschouwen, dan verkrijgen we, rekening houdend met

$$\lim_{x \to \infty} x^{-1} \left\lfloor \frac{x}{t} \right\rfloor = \frac{1}{t} ,$$

dat

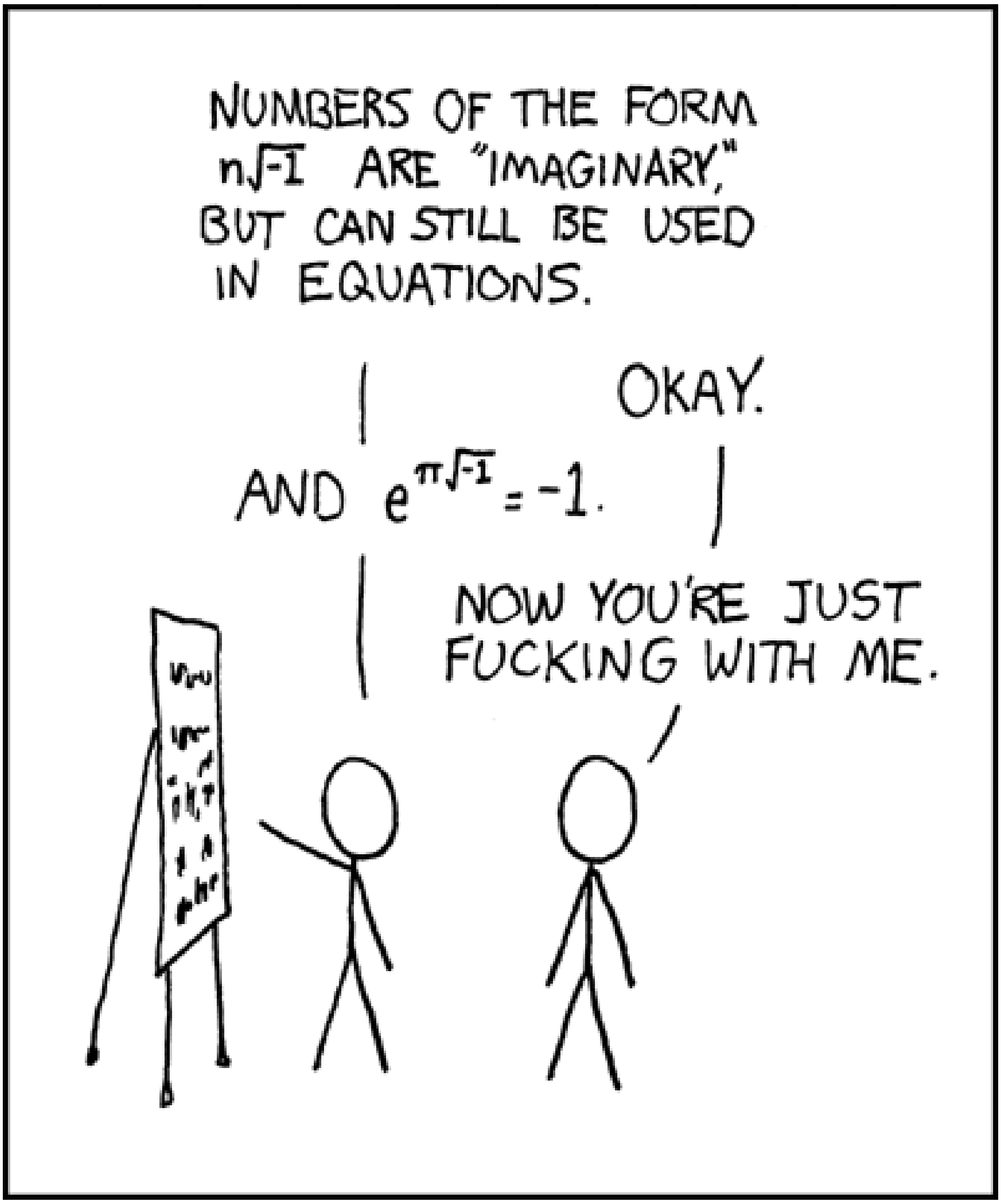
$$1 = \sum_{i=1} \frac{1}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{p_i p_j p_k} - \cdots + (-1)^{N+1} \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_N} ,$$

of dus $a = 1$, een contradictie.

Referenties

[1] `http://www.cut-the-knot.org/proofs/primes.shtml`

TDM



http://xkcd.com/179/

UniMath 2009-2010

De opleiding wiskunde van de Universiteit Gent heeft in het academiejaar 2009-2010 zijn project "UniMath 2009–2010" gelanceerd. Dit project bestaat erin dat lesgevers van de universiteit een kleine cursus komen geven in een school, aan leerlingen van het laatste en/of voorlaatste jaar, uit een wiskundig sterke richting. Elke cursus was goed voor zes lesuren, en er was keuze tussen vijf onderwerpen: getaltheorie met toepassingen in de cryptologie, meervoudige integratie met allerlei toepassingen zoals behoudswetten, de planimeter, grafentheorie met toepassingen in de gps, vaagheid met toepassingen in de modellering, projectieve vlakken met toepassingen in de codeertheorie. Elk onderwerp werd gebracht in vijf tot tien verschillende scholen in het Vlaamse land. De lesgevers kwamen uit alle geledingen: van studenten, over assistenten, wetenschappelijke medewerkers, doctorandi, post-docs, tot docenten en hoogleraars.

Op woensdag 21 april, in de namiddag, organiseerden we voor al die leerlingen een groots opgezet slotevenement. Dit vond plaats in het gebouw S9 en het grasplein ernaast. Het was een soort competitie waarin één klas de beker kon winnen. De tweede en derde wonnen ook nog boeken en dvd's. Uit wat bestond de competitie nu? Er waren vier gedeelten. Vooreerst speelden de leerlingen een quiz. De vragen kwamen uit de geziene leerstof. Een verkapt examen, zeg maar. Een tweede gedeelte bestond uit zeven wiskundig geïnspireerde spelletjes, zoals een legspel geënt op het Lemma van Sperner, of n kegels op n rijen van drie plaatsen voor variërende n. Het derde deel was een massaspel: er werden vragen afgevuurd over algemene wiskunde, met twee mogelijke antwoorden. Wie in het juiste vak ging staan mocht verder doen. De anderen vielen af. Zodra er minder dan tien overblijvers waren, kregen die elk een bonnetje, en begon het spel opnieuw. Een voorbeeld van een vraag: wat is het grootst: π^e of e^π. Vijf seconden bedenktijd… Ten slotte konden met de vergaarde bonnetjes raadsels gekocht worden van verschillende moeilijkheidsgraad, en moesten de klassen een zo hoog mogelijke score halen door die raadsels op te lossen. Winnaar werd het zesde jaar van het Sint-Pietersinstituut uit Gent. Zij wonnen de beker. Maar elke deelnemer kreeg een T-shirt mee van de Universiteit Gent als aandenken.

Van de 38 klassen die meededen met het project, kwamen er uiteindelijk 14 naar de slotdag, met in het totaal ongeveer 140 leerlingen. Uit de vele positieve reacties onthouden we vooral het enthousiasme van de leerlingen. Een leraar verwoordde het zo: “Ik heb mijn leerlingen nog nooit zo lang zo geconcentreerd gezien. Op een gewone schooldag is het ondenkbaar om ze tot 6u 's avonds nog zo actief te houden”.

Het organiseren van zo een evenement is geen triviale job. Edoch, ook op wiskundig vlak is het een uitdaging. Om de klassen optimaal te kunnen verdelen over de spelletjes kwam het volgend wiskundig vraagstuk naar voren. Ik zal het formuleren in voetbaltermen, dat is gemakkelijker te doen (vooral in tijden van wereldbekers en zo): gegeven acht voetbalploegen, die op zeven verschillende speeldagen allemaal eens tegen elkaar moeten spelen, op zeven verschillende terreinen. Kan je dat zo regelen dat elke ploeg juist eenmaal op elk terrein gespeeld heeft? Is de oplossing uniek? Kan je veralgemenen naar $2n$ ploegen op $2n-1$ terreinen? Voor welke n heeft dit een oplossing? Om over na te denken tijdens de vakantie. Je mag altijd je oplossingen insturen.

HVM

Problem solving: Vieta-jumping

De methode van *Vieta-jumping* (ook wel *root-flipping* genoemd) is toepasbaar op een zeer herkenbare klasse van problemen, die vaak van een bijzonder hoge moeilijkheidsgraad zijn. De problemen waarop deze methode werkt zijn meestal gekarakteriseerd door het concept van deelbaarheid van natuurlijke getallen en het veelvuldig voorkomen van kwadraten.

Het basisidee is geworteld in Fermat's methode van de oneindige afdaling. Er wordt een fictieve oplossing gekozen die een bepaalde grootheid minimaliseert, maar waarvoor de te bewijzen eigenschap niet geldt. De gegeven relatie wordt dan als een kwadratische vergelijking in een van de variabelen herschreven. Met behulp van de formules van Vieta wordt vervolgens een oplossing geconstrueerd die de grootheid nog kleiner maakt. De methode algemeen omschrijven is weinig nuttig, ze laat het duidelijkst haar kracht zien wanneer we ze leren kennen in de context van concrete problemen. De problemen die met deze methode oplosbaar zijn, zijn naast zeer herkenbaar ook zeer dun gezaaid. We beginnen met het klassieke voorbeeld, waar overigens een verhaal aan verbonden is.

Dit historisch probleem werd door West-Duitsland voorgesteld voor de IMO in 1988. Geen van de 6 leden van het Australische problem-solving committee vond een oplossing voor het probleem, en gezien de aard van het probleem werd de hulp van de 4 meest vooraanstaande Australische getaltheoretici ingeroepen. Geen van hen kon het probleem oplossen in 6 uur tijd. Nadat het probleem dan toch voorgesteld werd, gemarkeerd met een dubbele asterisk, werd na lange discussie besloten om het in de wedstrijd voor te leggen aan de studenten. Niet minder dan 11 studenten gaven perfecte oplossingen.

Probleem (IMO 1988, Probleem 6)**.** Zijn a en b natuurlijke getallen zodat $ab+1$ een deler is van a^2+b^2. Bewijs dat $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ een volkomen kwadraat is.

Oplossing. Stel $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$. Fixeer k en beschouw nu

$$\mathcal{S} = \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{a^2+b^2}{ab+1} = k \right\} \neq \emptyset.$$

We beweren dat er een koppel (a,b) gevonden kan worden in $\mathcal{S}$ met $b=0$. Dit zou impliceren dat $k=a^2$, wat het gestelde zou bewijzen.

Beschouw een element (A, B) van S waarvoor de som $A + B$ minimaal is. Veronderstel dat k geen volkomen kwadraat is en dat $A \geq B > 0$. De vergelijking

$$\frac{x^2 + B^2}{xB + 1} = k \iff x^2 - kBx + B^2 - k = 0$$

heeft $x = A$ als oplossing. Uit de formules van Vieta halen we nu dat

$$x_2 = kB - A = \frac{B^2 - k}{A}$$

ook een oplossing is. De gelijkheid $x_2 = kB - A$ toont dat x_2 een geheel getal is, terwijl $x_2 = \frac{B^2-k}{A}$ toont dat $x_2 \neq 0$, en bovendien dat $x_2 > 0$, want anders zou

$$x_2^2 - kBx_2 + B^2 - k \geq x_2^2 + k + B^2 - k > 0.$$

Anderzijds is ook

$$x_2 = \frac{B^2 - k}{A} < \frac{B^2}{A} \leq \frac{A^2}{A} = A\,.$$

We hebben nu aangetoond dat (x_2, B) tevens een oplossing is, die bovendien voldoet aan $x_2 + B < A + B$, in tegenstrijd met de minimaliteit van $A + B$.

Er moet met andere woorden zeker een oplossing bestaan met $b = 0$ en $k = a^2$, hetgeen bewezen moest worden.

Probleem. Zijn x en y natuurlijke getallen zodat xy een deler is van $x^2 + y^2 + 1$. Bewijs dat

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = 3.$$

Oplossing. Stel $\frac{x^2+y^2+1}{xy} = k$. Fixeer nu k en beschouw de verzameling

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = k\right\} \neq \emptyset.$$

Neem nu een koppel (X, Y) in $\mathcal{A}$ waarvoor $X + Y$ minimaal is. (Als er meerdere dergelijke koppels zijn, neem er dan willekeurig één van.)

Veronderstel dat $X > Y$ en beschouw nu de volgende vergelijking in t:

$$\frac{t^2 + Y^2 + 1}{tY} = k \iff t^2 - kYt + Y^2 + 1 = 0.$$

We weten dat $t = X$ een oplossing is van deze vergelijking, en uit de formules van Vieta halen we dat

$$x_2 = kY - X = \frac{Y^2 + 1}{X}$$

ook een oplossing is. Uit $x_2 = kY - X$ halen we dat x_2 een geheel getal is. Verder leiden we af dat $x_2 = \frac{Y^2+1}{X} < X$ en dat bovendien x_2 positief is. Uit al deze informatie besluiten we dat $(x_2, Y) \in \mathcal{A}$, en dat bovendien $x_2 + Y < X + Y$, hetgeen een contradictie is.

Uit het voorgaande leiden we af dat een oplossing die $x + y$ minimaliseert noodzakelijk $x = y$ moet hebben. We krijgen dat $k = \frac{2x^2+1}{x^2}$, en omdat $k \in \mathbb{N}$ volgt hieruit dat $x = 1$ en bijgevolg $k = 3$.

Recent dook op de IMO alweer een probleem op dat met deze methode opgelost kon worden, want in 2007 was probleem 5 voor studenten die goed vertrouwd waren met Vieta-jumping allesbehalve onoverkomelijk. Aangezien veel studenten tegenwoordig vertrouwd zijn met de techniek is de situatie enigszins minder legendarisch dan die in 1988.

Problemen

1. (UK Selectietest IMO) Voor welke natuurlijke waarden van n heeft de vergelijking
$$a + b + c + d = n\sqrt{abcd}$$
oplossingen met a, b, c, d natuurlijke getallen?

2. (CRUX Mathematicorum) Zijn a, b, c natuurlijke getallen zodat
$$0 < a^2 + b^2 - abc \leq c.$$
Bewijs dat $a^2 + b^2 - abc$ een volkomen kwadraat is.

3. (IMO 2007) Zijn a en b natuurlijke getallen zodat
$$4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2.$$
Bewijs dat $a = b$.

Jan Vonk

Kersverse doctors

Sam Sanders — *Reverse Mathematics: Hoe sommige stellingen gelijker zijn dan andere*

Reverse Mathematics (RM) is een programma binnen de grondslagen van de wiskunde gestart door Harvey Friedman in de jaren zeventig. In RM zoekt men de minimale axioma's $\mathcal{A}$ die een stelling $\mathcal{T}$ uit de *gewone* wiskunde bewijzen. Hierbij komt $\mathcal{T}$ uit de 'alledaagse' wiskunde: geen exotisch ding zoals het lemma van Zorn, maar bijvoorbeeld een stelling i.v.m. differentiaalvergelijkingen. Bepaalde axioma's $\mathcal{A}$ keren steeds terug; men noemt ze de 'Big Five': RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0 en Π_1^1-CA_0. Ofwel is een stelling $\mathcal{T}$ bewijsbaar in de basistheorie RCA_0 ofwel bewijst RCA_0 dat $\mathcal{T}$ equivalent is met een van de andere Big Five. De Big Five komen dan ook nog eens overeen met verschillende stromingen binnen de filosofie van de wiskunde (WKL_0 bvb. met Hilbert's finitistische wiskunde). Aangezien er oneindig veel logische principes zijn, is het fenomeen van RM zeer opmerkelijk.

In mijn thesis heb ik daar nog een schepje bijgedaan. Veronderstel dat $\mathcal{T}_=$ een stelling uit de gewone wiskunde is die expliciet de gelijkheid '$=$' bevat ($\mathcal{T}_=$ is bvb. Peano's stelling i.v.m. differentiaalvergelijkingen $y' = f(x,y)$). Als $\mathcal{T}_=$ equivalent is met WKL_0, dan is $\mathcal{T}_\approx$ equivalent met het Universele-Overdrachtsprincipe. Hierbij is $\mathcal{T}_\approx$ de stelling $\mathcal{T}_=$ met gelijkheid '$=$' vervangen door '$\approx$', de gelijkheid op infinitesimalen na uit de Nietstandaard Analyse ($\mathcal{T}_\approx$ is bvb. Peano's stelling voor $y' \approx f(x,y)$). Het Universele-Overdrachtsprincipe drukt uit dat de infinitesimalen en de 'gewone' getallen (bvb. $\mathbb{Q}$) dezelfde eigenschappen hebben. Aldus ziet men dat het fenomeen van RM 'robuust' is m.b.t. de introductie van een infinitesimale fout, een unicum binnen de grondslagen van de wiskunde. Er zijn nog veel meer implicaties voor de filosofie van de wiskunde en er is nog oneindig veel terrein te verkennen (zoals ACA_0).

Geertrui Van de Voorde — *Blocking sets in finite projective spaces and coding theory*

Het is algemeen geweten dat met elke $(n+1)$-dimensionale vectorruimte, een n-dimensionale projectieve ruimte correspondeert. In deze thesis beschouwden we enkel *eindige* projectieve ruimten, waarbij elke rechte, elk vlak, …een eindig aantal punten bevat.

Een *blokkerende verzameling* B in een eindig projectief vlak is een verzameling punten die elke rechte blokkeert (met andere woorden, elke rechte bevat minstens één punt van B). De verzameling punten van een rechte vormt een triviale blokkerende verzameling, omdat elke twee rechten in het projectief vlak snijden. Analoge definities gelden voor k-blokkerende verzamelingen in de n-dimensionale projectieve ruimte, waarbij we $(n-k)$-dimensionale ruimten blokkeren.

We bewezen dat een k-blokkerende verzameling van grootte kleiner dat $2q^k$ *op een unieke manier* te reduceren is naar een k-blokkerende verzameling waarvoor elk punt essentieel is, en dat een verzameling die bijna alle $(n-k)$-ruimten blokkeert, bestaat uit een $(n-k)$-blokkerende verzameling waaruit één punt verwijderd werd. Het *lineariteitsvermoeden* voor blokkerende verzamelingen stelt dat een kleine minimale verzameling steeds van een bepaald type, namelijk lineair, is. We bewezen dit vemoeden in een bepaald geval (namelijk als het veld waarover we werken een derde macht van een priemgetal is). Om dit te kunnen bewijzen, bestudeerden we lineaire verzamelingen in detail en kwamen tot enkele essentiële resultaten op dit gebied.

Tenslotte bestudeerden we de *codes* die afkomstig zijn van diverse meetkundige structuren. Voor het belangrijkste resultaat associeerden we blokkerende verzamelingen aan codewoorden van klein gewicht in de code van punten en deelruimten van de projectieve ruimte en konden op die manier nieuwe resultaten over deze klassieke codes bewijzen.

Tom Mélange — *Vaaglogische technieken voor ruisverwijdering in videobeelden en intervalwaardige wiskundige vaagmorfologie*

In de hedendaagse wereld spelen videobeelden een belangrijke rol in tal van toepassingen zoals verkeersobservaties, bewakingssystemen, enz. Door een slechte verwerving, verzending of opname van de beelden, zijn deze echter gewoonlijk onderhevig aan ruis. Als gevolg hiervan zullen verschillende beeldverwerkingstechnieken minder presteren en is er dus nood aan een voorafgaande ruisfiltering. In het eerste hoofddeel van de thesis presenteren we verschillende vaaglogische filters voor verschillende ruistypes en zowel voor grijswaarde- als kleurvideo's. Vaagverzamelingenleer en vaaglogica zijn veralgemeningen van de klassieke scherpe verzamelingenleer en binaire logica. In de klassieke verzamelingenleer behoort een element uit het universum steeds tot de verzameling of niet. In de vaagverzamelingenleer kan een element ook tot een bepaalde graad tot de verzameling behoren. Analoog kan in de vaaglogica een gegeven uitdrukking ook tot een bepaalde graad waar zijn in plaats van binair waar of vals. Dergelijke graduele overgang maakt vaagverzamelingen zeer geschikt voor het verwerken van menselijke kennis waarin vaak linguïstische waarden (zoals groot, klein, ...) worden gebruikt.

In het tweede hoofddeel van de thesis besturen we intervalwaardige wiskundige vaagmorfologie. Wiskundige morfologie is een beeldverwerkingstheorie voor de analyse van spatiale structuren in beelden. De theorie wordt onder andere gebruikt in toepassingen zoals randdetectie, objectherkenning, patroonherkenning, beeldsegmentatie, beeldvergroting, enz. Ze werd eerst ontwikkeld voor zwart-wit beelden en werd later uitgebreid naar grijswaardebeelden en kleurenbeelden. De intervalwaardige wiskundige vaagmorfologie is een uitbreiding van de wiskundige morfologie voor grijswaardebeelden naar intervalwaardige grijswaardebeelden. Dit zijn beelden waarbij onzekerheid omtrent de grijswaarde in rekening gebracht wordt. Dergelijke beelden kunnen gerepresenteerd worden als intervalwaardige vaagverzamelingen, die een uitbreiding zijn van de klassieke vaagverzamelingen.