Editoriaal

Op het moment van het schrijven van dit editoriaal is het bitter koud, veel te koud eigenlijk om een editoriaal te schrijven. We hebben er opnieuw een boeiend jaar opzitten, en vergezeld van een warme dampende chocomelk stomen we ons alweer klaar voor het volgende, hopelijk even boeiende jaar. (Hé, heb jij ook dat *déjà vu* gevoel?)

Het is duidelijk dat 2011 wel een schitterend jaar moet worden, want 2011 is een priemgetal! (En dat was intussen toch al weer 8 jaar geleden.) Er is alvast een merkwaardige wetenschappelijke wijzigingen gepland in 2011: een nieuwe definitie van "kilogram". Geen paniek, we zullen niet plotseling 5 kilogram zwaarder worden (tenzij er wat eindejaarskilo'tjes blijven plakken zijn). Maar de kilogram is op dit moment de enige SI-eenheid die nog vastgelegd is aan de hand van een fysisch object, de zogenaamde IPK (International Prototype Kilogram), die gemaakt is van een platina-iridiumlegering, en reeds dateert van 1889. Er is een nieuw voorstel in de maak om de kilogram te herdefiniëren in termen van de Planck constante h, met behulp van een zogenaamde Watt-balans; de nieuwe kilogram zou dan een soort "electronische kilogram" worden. Let wel, dit alles is nog maar een voorstel, en als het even vlot gaat als met de Belgische politiek dan zullen we wellicht nog een beetje langer moeten wachten op onze nieuwe kilogram.

Wat intussen wel wat kilo'tjes verloren heeft, is onze kas, die er eigenlijk maar wat magertjes bijzit. We voelen ons dan ook verplicht om jullie een kleine bijdrage van 5 euro vragen, waarmee je lidmaatschap van QED weer voor een jaar (of langer, als onze reserves dat toelaten) verlengd wordt. Hiermee kunnen we dan weer deze *Tussen Haakjes* drukken en versturen, en kunnen we voor drankjes en hapjes zorgen bij onze activiteiten—en zo is er weer eentje in aantocht! We hopen jullie, minstens even talrijk als bij onze vorige activiteit, te mogen ontvangen op de lezing van Kris Verburgh, die ons op 23 maart zal weten te boeien met het onderwerp "artificiële intelligentie". Meer details sturen we later per email nog door. (De meesten onder jullie hebben immers je gegevens doorgegeven via de webpagina `http://qed.ugent.be/gegevens`, waarvoor dank!)

Intussen wensen we je alvast veel leesplezier!

TDM, HV

Diofantische benaderingen en de Fields Medailles

Om de vier jaar wordt het Wereldcongres van de Wiskunde georganiseerd, waar de befaamde Fields Medailles uitgereikt worden. Qua prestige komen deze overeen met de Nobelprijzen voor andere wetenschappen. Dit jaar ging het congres door in Hyderabad (Indië) en werden er vier medailles uitgereikt, twee in de theoretische en twee in de toegepaste wiskunde:

- aan Elon Lindenstrauss voor zijn toepassingen van de theorie van de dynamische systemen in de getaltheorie.
- aan Ngô Bao Châu voor zijn bewijs van het zgn. Fundamentele Lemma in de theorie van de automorfe vormen door middel van originele technieken in de algebraïsche meetkunde. Het Fundamentele Lemma is een onderdeel van het Langlands-programma, een reeks van onbewezen vermoedens die zeer uiteenlopende gebieden van de wiskunde met mekaar in verband brengen.
- aan Stanislav Smirnov voor zijn wiskundige fundering van een aantal resultaten over modellen (percolatie-modellen en het Ising model) in de statistische fysica.
- aan Cédric Villani voor zijn bewijzen van resultaten over de Boltzmann-vergelijking die inzicht geven in de snelheid waarmee de entropie van een gas toeneemt.

Bijna alle gelauwerde resultaten combineren verschillende vakgebieden van de wiskunde. Het is dan ook onbegonnen werk om eventjes *tussen haakjes* de wiskunde achter de Fields Medailles uit te leggen. Om toch enigszins een idee te geven, bekijken we een van de toepassingen van het werk van Lindenstrauss in de getaltheorie.

Het betreft hier de vraag hoe goed een reëel getal α benaderd kan worden door een rationaal getal p/q met kleine noemer. Voor elke $q \in \mathbb{N}$ kan er duidelijk voor gezorgd worden dat $|\alpha - p/q| < 1/q$ door p goed te kiezen. Maar kan het ook beter? Als bijvoorbeeld $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, de gulden

De Fields Medaille winnaars van 2011. V.l.n.r.: Elon Lindenstrauss, Stanislav Smirnov, Cédric Villani, Ngô Bao Châu.

snede, dan volgt uit de bekende formule voor het n-de Fibonacci-getal[1]

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} \tag{1}$$

dat de verhouding F_{n+1}/F_n nadert naar α. Die benaderingen hebben een beduidend kleinere fout dan $1/F_n$. Zo is

$$|\alpha - 3/2| = 0,118\ldots, \quad |\alpha - 5/3| = 0,048\ldots, \quad |\alpha - 8/5| = 0,018\ldots \text{ enz.}$$

In feite volgt uit (1) dat $|\alpha F_n - F_{n+1}| = 1/\alpha^{n+1}$, zodat $\big|\alpha - \frac{F_{n+1}}{F_n}\big| < \frac{1}{F_n^2}$ voor voldoend grote n. Dirichlet bewees in de 19de eeuw dat iets gelijkaardigs geldt voor elk irrationaal getal α:

Stelling (Dirichlet). *Voor elke $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bestaan oneindig veel $p, q \in \mathbb{Z}$ ($q \neq 0$) zo dat $|\alpha - p/q| < 1/q^2$.*

[1]De Fibonacci-getallen zijn $F_0 := 1$, $F_1 := 1$, $F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$ $(n \geq 1)$. De formule (1) gaat men na via volledige inductie.

Bewijs. Het gevraagde is gelijkwaardig met:

Bestaan er oneindig veel $p, q \in \mathbb{Z}$ $(q \neq 0)$ zo dat $|q\alpha - p| < 1/q$?

Neem $N \in \mathbb{N}$ vast. We noteren het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x als $\lfloor x \rfloor$. Dan is $0 \leq n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor < 1$ voor $n = 0, 1, \ldots, N$. Onder $N+1$ getallen in $[0, 1[$ bestaan er noodzakelijk twee waarvan de onderlinge afstand kleiner is dan $1/N$. Verdeel immers $[0, 1[$ in N deelintervallen $\left[0, \frac{1}{N}\right[, \ldots, \left[\frac{N-1}{N}, 1\right[$; dan moet een van deze intervallen tenminste twee van de $N + 1$ getallen bevatten (duivenhokprincipe). We vinden dus $0 \leq n < m \leq N$ waarvoor

$$|\underbrace{(m-n)}_{=:q}\alpha - \underbrace{(\lfloor m\alpha \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor)}_{=:p}| = |(m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor) - (n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor)| < 1/N.$$

Omdat $0 < q \leq N$ is dus ook $|q\alpha - p| < 1/q$. Hebben we zulke p en q gevonden, dan herhalen de procedure voor een N die zo groot is dat $1/N \leq |q\alpha - p|$ om een andere p en q te vinden, enz. $\square$

Het resultaat van Dirichlet is, op een constante na, het best mogelijke. Voor $c < 1/\sqrt{5}$ is het bijvoorbeeld bekend dat slechts eindig veel benaderingen van de gulden snede $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ bestaan waarvoor $|\alpha - p/q| < c/q^2$.

Een verwante vraag is of we twee reële getallen α, β gelijktijdig goed kunnen benaderen door breuken p/q, r/q met een gemeenschappelijke kleine noemer. Door het argument van Dirichlet aan deze situatie aan te passen, ziet men dat voor elke $N \in \mathbb{N}$ er $p, q, r \in \mathbb{Z}$ bestaan met $0 < q \leq N^2$ zo dat $|q\alpha - p| < 1/N$ en $|q\beta - r| < 1/N$. In het bijzonder bestaan oneindig veel $p, q, r \in \mathbb{Z}$ waarvoor $|\alpha - p/q| \cdot |\beta - r/q| < 1/q^3$. In 1930 uitte Littlewood het vermoeden dat die ongelijkheid (zelfs op een constante na) niet de best mogelijke is:

Vermoeden (Littlewood)**.** *Zij α, $\beta \in \mathbb{R}$. Voor elke $c > 0$ bestaan dan $p, q, r \in \mathbb{Z}$ $(q \neq 0)$ zo dat $|\alpha - p/q| \cdot |\beta - r/q| < c/q^3$.*

Het vermoeden van Littlewood is nog steeds onbewezen, zelfs voor de eenvoudige waarden $\alpha = \sqrt{2}$ en $\beta = \sqrt{3}$. Maar in 2006 bewezen Einsiedler, Katok en Lindenstrauss dat de verzameling van de uitzonderingspunten $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ op dit vermoeden zeer klein is (meer bepaald dat haar

Hausdorff-dimensie[2] 0 is). Verrassend genoeg gebruikten ze hiertoe technieken uit de theorie van de dynamische systemen.

Een klassiek voorbeeld van een dynamisch systeem is de beweging van een aantal hemellichamen onder invloed van de zwaartekracht. Zo'n systeem wordt meestal beschreven d.m.v. een faseruimte X van mogelijke configuraties, en een groep van transformaties T_t: $X \to X$ die de tijdsevolutie van het systeem op een tijdstip t weergeven. Een belangrijke eigenschap die zo'n dynamisch systeem kan hebben, is dat de transformaties T_t maat-behoudend zijn. Dit betekent ruwweg dat voor twee delen A en B van de faseruimte met hetzelfde volume, punten gedurende hetzelfde percentage van de tijd in A terechtkomen als in B. Deze eigenschap is later veralgemeend naar andere abstracte maten die niet met het gewone volume overeenkomen, en ook naar andere groepen van transformaties dan $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$.

De manier waarop dynamische systemen te pas komen bij het vermoeden van Littlewood is nogal technisch. We vermelden daarom enkel dat de beschouwde faseruimte X een ruimte is van roosters $\{kv_1 + lv_2 + mv_3 : k, l, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (hierbij zijn v_1, v_2, v_3 vectoren in $\mathbb{R}^3$), en dat de groep van transformaties een goedgekozen groep G van lineaire transformaties $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is. De kern van het resultaat van Einsiedler, Katok en Lindenstrauss bestaat uit een diepe stelling over zgn. maat-rigiditeit van dit dynamisch systeem. Dit betekent dat er onder bepaalde voorwaarden slechts één abstracte maat bestaat waarvoor de transformaties in de groep G maat-behoudend zijn. Maat-rigiditeit van een dynamisch systeem blijkt ook in andere contexten een krachtig stuk gereedschap te zijn waarmee moeilijke problemen gekraakt kunnen worden.

HV

[2]De Hausdorff-dimensie van een verzameling in het vlak veralgemeent de dimensie van een gladde kromme (die 1 is); ze kan een willekeurig reëel getal tussen 0 en 2 zijn.

Wanneer wordt Vlaanderen best onafhankelijk?

Het is nog nooit zo brandend actueel geweest als heden te dage. Nog nooit leek het ook zo dichtbij en zo werkelijk als tegenwoordig. Nooit hebben we er ook zo intens over nagedacht als nu. Vlaanderen onafhankelijk. Enkele vragen die daarbij oprijzen zijn: kan het? zal het? en wanneer? Op de twee eerste vragen kunnen we als wiskundige geen zinnige bijdrage leveren. Maar de laatste vraag is een kolfje naar onze hand. Wanneer worden we best onafhankelijk? Op welke dag van welke maand? We zullen deze vraag oplossen vanuit twee standpunten: deze van de economisch bewuste vertegenwoordiger van de regering, en deze van de gewone man, die graag nog een extra dagje vrijaf meepikt. Beide oplossingen verlopen analoog aan elkaar, dus laat ons voor de eenvoud en om de gedachten te vestigen in de huid kruipen van de gewone man. Wat we tenslotte zelf ook zijn.

Wanneer België ophoudt met te bestaan, zal vermoedelijk anderhalve dag verlof in lucht opgaan. Inderdaad, 21 juli zal dan een gewone werkdag worden, en ook 15 november zal niet langer op het verlofdaglijstje staan van enkele overheidsbedrijven of ex-staatsinstituten. Dit wordt ongetwijfeld gecompenseerd door de dag waarop we onafhankelijk worden als standaardverlofdag te lanceren, en door 11 juli up te graden naar onze nationale feestdag. Dus opnieuw ongeveer anderhalve verlofdag erbij. Als gewone werkmens kunnen we daarmee best tevreden zijn. Kunnen we beter doen? Hier komt ons wiskundig denkwerk om de hoek kijken. Misschien kunnen we onze onafhankelijksdag optimaal kiezen? Om te beginnen niet in de grote vakantie, want dan is half Belgie, heu…Vlaanderen, toch in het buitenland (en maak daar maar drie-vierden van, want Wallonie is ook buitenland…). Ook Kerst- en Paasvakantie zijn uit den boze. En natuurlijk ook gevestigde waarden zoals 1 mei, 1 november, 11 november. Vanzelfsprekend gaan we ook niet op 29 februari afscheuren, want dat zou ten eerste betekenen dat we dit maar om de 4 jaar kunnen vieren, en bovendien dat we nog een dik jaar moeten wachten vooraleer onafhankelijk te worden. De vraag die we nu als wiskundige krijgen voorgeschoteld is: zijn alle andere data eender?

Ons gezond verstand zegt ons dat dit zo wel zou moeten zijn. Immers, alle dagen van de week spelen dezelfde rol, niet? Gemiddeld zal elke dag die we kiezen eenmaal op zeven jaar een zondag zijn, en eenmaal op zeven jaar een zaterdag. Dus, waar maken we ons druk om? Wel, is dat wel zo?

Spelen alle dagen van de week werkelijk dezelfde rol? Indien onze wereld oneindig lang meeging, dan zou dat inderdaad zo zijn, maar het leven op aarde is eindig, en ooit is het hier gedaan. De splitsing van Belgie is er al een voorteken van... Onze kalender zit zo in elkaar dat het systeem van schrikkeljaren de eerstkomende 3000 jaar niet wijzigt. En we kunnen aannemen dat binnen 3000 jaar het systeem van verlofdagen wellicht al lang zal achterhaald en gewijzigd zijn, als de mens in zijn huidige vorm dan nog wel bestaat. Dus zonder verlies van algemeenheid kunnen we kijken welke dagen het meest gunstig zijn om het label van een verlofdag op te plakken binnen een tijdsspanne van 3000 jaar. Geldt daarin dan niet dat elke dag van de week aan elkaar gelijk is? Neen, bijvoorbeeld, het is bekend dat de eerste dag van een millennium alleen een maandag of een donderdag kan zijn (ga maar na dat maandag 1 januari 2001 een maandag was). Aha, dus maandagen en donderdagen spelen al een bijzondere rol. Dat moeten we eens van naderbij bekijken.

Onze tijdrekening begon op maandag 1 januari 0001. Hierin onderstellen we dat er van in den beginnen schrikkeljaren waren in het systeem zoals we nu kennen (Gregoriaanse kalender). Dus om de vier jaar een 29ste februari, om de 100 jaar dan weer niet, en om de 400 jaar dan weer wel. Deze cyclus zo een aantal keer herhalen, en het wordt tijd om misschien een uitzondering op een uitzondering op een uitzondering op een uitzondering te maken, hoewel moderne berekeningen erop wijzigen dat we tegen dan een extra schrikkeljaar zullen nodig hebben. Swat, zonder verlies van algemeenheid mogen we onze berekeningen doen over een tijdslengte van precies 400 jaar. Daarin zitten 400x365+97 = 147097 dagen, oftewel precies en exact 20871 weken. Dus 1 januari 0401 is opnieuw een maandag, en alles herbegint opnieuw. Daar er 97 schrikkeljaren geweest zijn in die 400 jaar, en dit niet deelbaar is door 7, zullen bepaalde dagen van de week meer voorkomen als 29ste februari dan andere, en zullen dus ook bepaalde dagen bijvoorbeeld meer voorkomen als een 13de van de maand dan andere. Dat is onder andere het geval voor vrijdagen... Maar dat is een ander verhaal.

Fixeren we bijvoorbeeld de datum van 1 maart. In het jaar 0001 was dat een donderdag. Het jaar daarop een vrijdag, dan een zaterdag, en dan komt er een schrikkeljaar. Dus geen zondag, maar achtereenvolgens maandag, dinsdag, woensdag en donderdag. Dan geen vrijdag, maar een zaterdag. Stellen we maandag dag 1 van de week, dan zien we dat eerst dag 0 wegvalt, dan dag 5, dan dag 3, enz. Dus in de loop van de eerste 24 schrikkeljaren worden de dagen zondag, vrijdag en woensdag vier maal overgeschrikkeld, en de overige dagen elk driemaal. In het jaar 0100 is 1 maart bijgevolg een maandag (want moest normaal overgeschrikkeld worden, maar 0100 is geen schrikkeljaar). In het jaar 0101 is 1 maart een dinsdag, en begint het spelleke opnieuw. Deze keer vallen vrijdag, woensdag en maandag vier keer weg, en de overige dagen driemaal. In het jaar 0201 is 1 maart een zondag, en dan de komende 100 jaar vallen woensdag, maandag en zaterdag elk viermaal weg. In het jaar 0301 is 1 maart een vrijdag, maar dan krijgen we 25 schrikkeljaren in plaats van 24. Dan vallen maandag, zaterdag, donderdag en dinsdag elk viermaal weg. Proef op de som: die dinsdag valt het laatst weg, en dit gebeurt in het jaar 0400. Dan is 1 maart een woensdag, en in 0401 is het opnieuw een donderdag, zoals we begonnen waren in het jaar 0001. Dus we kunnen nu vlug tellen hoeveel elke dag wegviel: maandag en woensdag 15 keer, vrijdag en zaterdag 14 keer, dinsdag, donderdag en zondag 13 keer. Dus we berekenen nu eenvoudig dat op die 400 jaar het 58 keer op dinsdag, donderdag en zondag 1 maart was, 57 keer op vrijdag en zaterdag, en 56 keer op maandag en woensdag.

Dus ons besluit is dat 1 maart een barslechte keuze is om ons los te maken van het juk van Wallonie. Want het valt een maximaal aantal keer op een zondag, en een bijna maximaal keer op een zaterdag. Alle data die een zevenvoud aantal dagen volgen op 1 maart, tot en met 28 februari, volgen dit zelfde stramien en zijn dus te verwerpen. Om het aantal zondagen te minimaliseren moeten we ofwel vier dagen later nemen (dan wordt die woensdag een zondag), ofwel zes dagen later (dan wordt die maandag een zondag). Om te kiezen tussen die twee kijken we wat er met de zaterdagen gebeurt. Op 5 maart hebben we 58 keer een zaterdag, en 7 maart valt evenveel keer op een zaterdag. Dus geen verschil. Misschien voor de schoolkinderen het aantal woensdagen minimaliseren? Op 5 maart is dit 57 keer, op 7 maart 58 keer. We hebben dus onze ideale dagen gevonden: op 5 maart, of elke zevende dag daarna.

Nu kunnen we er nog voor zorgen dat onze nationale feestdag in spe nooit kan samenvallen met een krokus- of allerheiligenverlof, of Paas- of Pinkstermaandag, of Hemelvaart. Bovendien zou een dag in de zomer of lente te verkiezen zijn boven eentje in de herfst of winter. Rekening houdend met al deze randvoorwaarden komen we tot nog slechts de volgende mogelijkheden: 19 maart (26 maart kan reeds Paasmaandag zijn; 12 maart kan in krokus vallen, zie dit schooljaar!), 18 en 25 juni, 3, 10 en 17 september. Men zou ook 30 april kunnen denken, maar in extreme gevallen (wanneer Pasen op 22 maart zou vallen) kan dit Hemelvaartdag zijn. In juni zijn er examens waarvoor een verlofdag alleen maar kommer en kwel zou brengen. Dus we blijven nog met vier mogelijkheden: 19 maart, 3, 10 of 17 september. Voor studenten zijn deze laatste drie echter niet te verkiezen, wegens ofwel examenperiode ofwel verlof. Blijft dus over: 19 maart. Hoewel voor onze eigen universiteit niet ideaal (het is soms automatisch verlof wegens Dies Natalis), moeten we hier toch het algemeen belang voor het persoonlijk belang plaatsen en 19 maart als meest aangewezen datum vooropplaatsen om de onafhankelijkheid van Vlaanderen te beginnen.

Ik zou dus zeggen: we maken ons op voor de Vlaamse Metten op 19 maart 2011: lang leve de ideale verlofdag!

En ik weet niet of je het al opgemerkt hebt: geen enkele wettelijke feestdag ligt op een ideale verlofdatum (waarmee ik bedoel, 5 maart of een veelvoud van zeven dagen later). Ik denk dat dit met opzet is…

HVM

Wiskundeonderwijs in Vlaanderen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

verschijnt vaker dan vroeger op examens van universiteitsstudenten. "Mogen we aan de universiteit ook een rekenmachine gebruiken om vierkantsvergelijkingen op te lossen?" Vakantiecursussen wiskunde worden bij meer opleidingen georganiseerd. Het aantal lesuren wiskunde in de basispakketten van het secundair onderwijs is erop achteruitgegaan, tot maximum 6u en 7u. Een vak van zes studiepunten, Wiskundige basistechnieken, werd in 2008 ingevoerd in het eerste jaar van de ingenieursopleiding, om studenten de wiskunde aan te leren die hun voorgangers al kenden uit het middelbaar onderwijs.

Kunnen onze 18-jarigen nog rekenen, redeneren of geen van beide? Kennen en kunnen ze nog hetzelfde als twintig jaar geleden op vlak van wiskunde? Is de kloof tussen Secundair Onderwijs en Hoger Onderwijs groter geworden?

De SOHO. Een breed samengestelde overleggroep startte in 2008 een grondige discussie rond de wiskundeproblemen die zich voordoen bij heel wat studenten die op de brug staan tussen secundair en hoger onderwijs. Erin zaten professoren en lesgevers uit het hoger onderwijs, pedagogische begeleiders uit de verschillende onderwijsnetten en wiskundestudenten.

Al vlug werd duidelijk dat de SOHO-overleggroep al een grote kluif zouden hebben met aanbevelingen van verbetering van het onderwijs in de wiskunde, in richtingen waar wiskunde een belangrijke component is.

Na boeiende maar soms moeizame gesprekken en vergaderingen kwam de SOHO-overleggroep tot een eindrapport waarin zij observaties en problemen formuleert, samen met enkele concluderende aanbevelingen, waar de vertegenwoordigers van het secundair en hoger onderwijs allen achter staan. Intussen werd deze 68 pagina's tellende tekst met duiding verspreid onder de leerkrachten van het middelbaar onderwijs en de opleidingen uit het hoger onderwijs, om reacties te verzamelen.

Leerlingen op hun wiskundehonger. In een tekst beschrijven twee wiskundestudenten het gevaar dat de wiskundig sterke leerlingen uit het oog verloren worden, wanneer de aandacht te veel gaat naar leerlingen die meer ondersteuning vragen. De afschaffing van de achtuursrichting en de watervalperceptie van de richtingen in het middelbaar, waarin richtingen met een pool wiskunde meer aanzien genieten, zijn belangrijke oorzaken voor klasgroepen die qua wiskundig niveau heterogeen zijn. In zo'n klassen dreigen het tempo en het niveau bepaald te worden door de zwakkere leerlingen.

710 bachelorstudenten wiskunde, fysica en ingenieurswetenschappen aan VUB, UGent, UHasselt, UA en KUL werden bevraagd. In hun persoonlijke commentaren vermelden ze telkens:

- het nut van een volwaardige achtuursrichting
- te laag niveau, toegespitst op de zwaksten
- tekort aan bepaalde onderwerpen
- te weinig aandacht voor theorie, bewijzen en redeneervermogen
- het belang van een goede leerkracht

De studentendelegatie in de SOHO-overleggroep adviseert het tegengaan van het watervaleffect door een goede trajectbegeleiding, differentiatie in het lesgeven en samenwerking met het hoger onderwijs, door projecten zoals UniMath (zie Tussen Haakjes 37, p. 9–10).

Leraar wiskunde als knelpuntenberoep. Er is een tekort aan masters wiskunde die voor het onderwijs kiezen. Ongeveer een kwart kiest voor het onderwijs, en de instroom wiskundestudenten in Vlaanderen is duidelijk lager dan vroeger. Steeds minder wiskundeleraren beschikken over het vereiste bekwaamheidsbewijs—steeds meer fysici, chemici, biologen, economen, industrieel en burgerlijk ingenieurs geven wiskunde.

Het grote knelpunt is om voldoende gemotiveerde leerkrachten met de nodige kwalificaties op te leiden en tijdens hun loopbaan te begeleiden, zodat ze door hun kwaliteitsvolle lessen hun leerlingen kunnen aansporen om de schoonheid, de bruikbaarheid en het maatschappelijk belang van wiskunde te ontdekken. Hopelijk zal, eens we daarin geslaagd zijn, de instroom wiskundestudenten weer stijgen en zullen we een groter aantal kandidaat-leerkrachten hebben.

Om die spiraal te doorbreken worden vier oplossingen aangebracht:

- het leraarberoep aantrekkelijker maken
- vakdidactische opleiding verplichten voor alle wiskundeleraren

- het uitbouwen van een permanente nascholing
- het oprichten van een overkoepelend instituut voor vakdidactiek wiskunde

Basisvaardigheden en parate kennis. In de derde tekst wordt de observatie gemaakt dat in het secundair onderwijs het traditionele overdrachtsonderwijs verschuift naar ontwikkelend onderwijs (al doend zelf de wiskunde ontdekken). Er moet een gezond evenwicht blijven tussen kennisoverdracht en vaardigheidstraining.

Het interessantst is een samenvatting van die inhouden waarvan men niet mag uitgaan dat ze door alle leerlingen gekend zijn, op basis van de eindtermen. Gelukkig wil dat niet zeggen dat leerlingen die inhouden écht niet kennen: een aardig aantal van de opgesomde onderwerpen zal door de modale student uit de pool wiskunde wél gekend zijn. Markante optredens in die lijst: priemgetal, notaties uit verzamelingenleer, groep, veld, determinanten, vectoren, notatie van functie als een afbeelding, samenstelling van functies, inverse functie, continuïteit, formele begrippen limiet en afgeleide.

In de eindtermen staat: De leerlingen kunnen bij het oplossen van wiskundige problemen functioneel gebruik maken van ICT. De SOHO benadrukt het belang van het woord functioneel en waarschuwt dat ICT-gebruik niet "learn to use" als doel mag hebben, maar juist "use to learn".

Ervaringen, overwegingen en verwachtingen uit het Hoger Onderwijs. In deze tekst schetst het hoger onderwijs concrete knelpunten op vlak van wiskundecompetenties van inkomende studenten. Aan de hand van uit het leven gegrepen anekdotes worden vaak voorkomende problemen geschetst.

Zo is er de uitrekenreflex, die studenten gefactoriseerde uitdrukkingen automatisch doet uitwerken, ook wanneer dat niet nuttig is om een probleem op te lossen. Het hoger onderwijs vraagt aandacht van het secundair onderwijs voor rekenen met inzicht en uitzicht.

Daarnaast wordt geobserveerd dat studenten het soms moeilijk hebben wiskundetaal te begrijpen, en nog veel slechter in staat zijn om die zelf te gebruiken. Het hoger onderwijs pleit voor aandacht voor grammaticaal correcte zinnen in redeneringen, uitleg en duiding.

Verder zou het hoger onderwijs graag een heropwaardering van het functiebegrip zien. Een functie is iets wat een input in een output omzet, en niet zomaar een uitdrukking in x of iets wat je kan tekenen. Door een slecht begrip van het concept functie, vinden studenten verwarrende notaties uit en kunnen problemen ontstaan zodra functies van meerdere veranderlijken beschouwd worden.

Verder wordt ook de nonchalance gehekeld: sommige studenten begrijpen niet dat er zwaar getild wordt aan fouten van het type $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$, wanneer de opgave was om een afgeleide te berekenen…

Conclusies en aanbevelingen. Op het einde wordt een veelomvattend advies gegeven, waarin alle vermelde aanbevelingen zijn verwerkt. Het advies van de SOHO heeft betrekking op de structuur en organisatie van het vak wiskunde in het secundair onderwijs, de inhoudelijke invulling, wiskundige vaardigheden, vakgerichte attituden, de didactische aanpak van wiskunde, de rol van ICT, de vorming van wiskundeleraren en de opvolging in het hoger onderwijs.

De conclusies zijn, zoals reeds vermeld, enkel van toepassing op de richtingen in het middelbaar onderwijs met wiskunde als poolvak, dus met 6, 7, 6+1, 6+2 of 8 uur wiskunde.

Interessant is dat op geen enkel moment gevraagd wordt om meer leerstof te zien. De belangrijkste taak van het secundair onderwijs is leerlingen een goede wiskundige attitude bijbrengen, die hen in staat zal stellen om abstractere wiskundecursussen uit het hoger onderwijs te beheersen.

Wat nu? Wanneer de reacties verzameld zijn van de betrokkenen, zal eventueel een laatste hand gelegd worden aan de tekst. Daarna zal ze verspreid worden naar alle relevante organisaties, zoals het ministerie van Onderwijs. Het is de bedoeling dat de stem van de SOHO-groep gehoord wordt en er een verandering komt in bepaalde facetten van het wiskundeonderwijs in Vlaanderen. We hopen dat de eerste stap daarnaar gezet is met het SOHO-overleg.

De tekst zelf kan je nalezen op `http://cage.ugent.be/soho.pdf`. Wie zelf commentaren heeft die voor de SOHO-groep interessant kunnen zijn, mag die altijd overmaken aan haar voorzitter, prof. Frank De Clerck (`fdc@cage.ugent.be`).

Bert Seghers

Gevogeld

Het probleem

OP EEN hoogspanningskabel landen een groot aantal vogels op een willekeurige plaats. Neem nu een gele pot verf, en probeer —heel voorzichtig— voor elke vogel het stuk kabel tussen deze vogel en zijn *dichtsbijzijnde* buur te schilderen. Welke proportie van de kabel zal dan geschilderd zijn?

Iets preciezer geformuleerd: als het aantal vogels naar oneindig gaat, wat is dan de limiet van de verwachtingswaarde van de proportie van het geschilderde deel van de kabel, in de veronderstelling dat de probabiliteitsverdeling van de vogels op de kabel uniform is?

Het antwoord

Het antwoord is niet meteen het soort antwoord dat je zou verwachten:

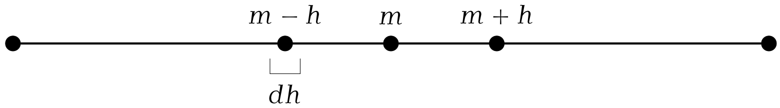
$$7/18\,.$$

Het bewijs

Zij n het aantal vogels, en veronderstel dat de kabel lengte 1 heeft. Veronderstel even dat er een vogel is die precies in het midden $m = 1/2$ van de kabel zit. We vragen ons af wat de verwachtingswaarde is van het stuk geschilderde kabel *tussen deze vogel en de vogel links ervan.* Als het aantal vogels heel groot wordt, geloof je hopelijk wel dat de exacte positie van deze vogel niet echt relevant is; we zullen de bekomen waarde dan voor elk van de n vogels in rekening brengen.

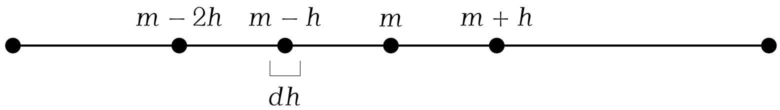
Okido, hier gaan we. Zij X de randomvariabele die de lengte van het stuk geschilderde kabel tussen de vogel in het midden en de vogel links ervan weergeeft. Voor elke h tussen 0 en $1/2$ vragen we ons af wat de kans is dat X een waarde aanneemt in een klein intervalletje dh rond de waarde h. Er zijn twee situaties waarin de waarde van X een niet-nul waarde h kan aannemen. In beide gevallen moet er zich uiteraard een vogel in het interval met grootte dh rond de waarde $m - h$ bevinden, en geen enkele andere vogel in het interval $[m - h, m[$.

(1) Ofwel zit er geen vogel in het interval $]m, m + h]$. Er zit dus geen enkele andere vogel in het interval $[m - h, m + h]$, terwijl de positie van de overige $n - 2$ vogels verder niet uitmaakt; deze bevinden zich dus in het resterende deel van lengte $1 - 2h$. De kans op deze situatie is dus $(n - 1) \cdot (1 - 2h)^{n-2} \cdot dh$.



(2) Ofwel zit er minstens één andere vogel in het interval $]m, m + h]$. Om het interval $[m - h, m]$ te mogen kleuren, moet dan de vogel links van de vogel in het midden als dichtste buur precies deze vogel in het midden hebben; de vogel links van deze vogel moet dus op een afstand groter dan h verwijderd zijn, en dus moet het hele interval $[m - 2h, m]$ verder "vogelvrij" zijn. De kans op deze situatie is dus de kans dat het interval $[m - 2h, m]$ niet bezet is door de overige $n - 2$ vogels, min de kans dat het hele interval $[m - 2h, m + h]$ niet bezet is door de overige $n - 2$ vogels —want het interval $]m, m + h]$ moet net wél bezet zijn. We krijgen dus

$$(n - 1) \cdot (1 - 2h)^{n-2} \cdot dh - (n - 1) \cdot (1 - 3h)^{n-2} \cdot dh.$$



De totale kans dat X in het intervalletje met grootte dh rond de waarde h ligt, is dus

$$(n - 1) \cdot \left(2(1 - 2h)^{n-2} - (1 - 3h)^{n-2}\right) \cdot dh.$$

De verwachtingswaarde is dus gegeven door deze uitdrukking te vermenigvuldigen met h en te integreren over het interval met mogelijke waarden van h:

$$E[X] = (n - 1) \cdot \int_0^{1/2} h\left(2(1 - 2h)^{n-2} - (1 - 3h)^{n-2}\right) dh.$$

Na een beetje rekenwerk vinden we

$$E[X] = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{7}{18} - \frac{3n-1}{9} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

Dit is dus de verwachte lengte van het geschilderde stukje kabel links van die ene vogel; om nu de totale verwachtingswaarde te bekomen, vermenigvuldigen we dit resultaat met het aantal vogels, en we vinden dus

$$E[\text{geschilderde kabel}] = \frac{7}{18} - \frac{3n-1}{9} \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

Het is nu duidelijk dat als n naar oneindig gaat, dat dan de laatste term naar nul gaat, en we bekomen dus inderdaad het magische antwoord 7/18.

Referenties

[1] `http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/BirdsOnWire.shtml`

TDM