# Vragen staat vrij…

In dit nummer geven we antwoorden op jullie wiskundige vragen! Of, dichter bij de waarheid, geven we jullie op z'n minst het adres van een website waarop jullie daarvoor terecht kunnen. Verder tonen we dat zelfs bij het spelen van gezelschapsspelletjes moeilijke (zelfs onopgeloste) wiskundige vragen naar voor komen. Ook wie zich afvraagt wat er de laatste jaren in de opleiding wiskunde aan de UGent veranderd is, is in dit nummer aan het juiste adres. Op de vraag of er nog een QED-activiteit op komst is, kunnen we meedelen dat we een bijeenkomst plannen waarop enkele oudstudenten aan de huidige studenten wiskunde komen vertellen over hun werkervaringen. Meer informatie hierover volgt per e-mail.

Maar ook wij hebben enkele vragen voor jullie: vooreerst proberen we op dit moment een zicht te krijgen op de huidige beroepen van onze afgestudeerde wiskundigen. De tijd dat een job voor het leven was, is immers lang voorbij, en we hebben moeite om de carrièrepaden van al onze oudstudenten te volgen. Hebben jullie nog contacten met (beroepsactieve) mede-oudstudenten, stuur dan een mailtje naar `qed@qed.ugent.be` en laat ons weten in welke beroepssectoren ze werkzaam zijn. We zijn ook al heel blij als jullie je beroepsgegevens in de alumni-databank up-to-date kunnen houden (we weten het, bij het registreren in de centrale UGent-alumnidatabank werden wel heel veel gegevens gevraagd, zodat de verleiding groot was om deze zeker niet allemaal in te vullen…).

Tot slot vragen we jullie aandacht voor het feit dat we overgeschakeld zijn naar kalenderjaren voor onze betalende lidmaatschappen door onze samenwerking met de centrale alumni-werking van de UGent. De voordelenkaarten blijven telkens geldig tot 31 december. Pas bij verlenging van het lidmaatschap worden ze opnieuw voor een jaar geactiveerd. Voor overschrijvingen na 31 december vragen we begrip dat de kaart mogelijks pas enkele dagen later opnieuw actief wordt. De huidige geldigheid van jullie voordelenkaart kunnen jullie vinden op de klever die rond dit nummer zit.

Veel leesplezier!

TDM, HV

## Ik heb een antwoord

KENNEN JULLIE de website `www.ikhebeenvraag.be`? Het is een fantastische website. Je zit met een probleem, je stelt die vraag op deze website, en je krijgt binnen de maand een antwoord. Ten minste, als het één van de wetenschappers in de meer dan 40 Belgische onderzoeksinstellingen belieft. Hoe interessanter je vraag, hoe meer kans op antwoord je hebt. Zelf ben ik ook "antwoordpersoon", maar meestal laat ik mijn collega's het werk doen. Of ik kijk de kat uit de boom, en antwoord pas indien mijn collega's roerloos blijven. Dus de gemakkelijke vragen ben ik sowieso kwijt. Bijvoorbeeld de vraag of elke $n$-de machtswortel van een natuurlijk getal ofwel een natuurlijk getal is, ofwel irrationaal. Te gemakkelijk.

Maar af en toe komt er een uitdaging in. Zo was het bijvoorbeeld met de volgende vraag, gesteld door een zekere Joyce, 17 jaar oud, middelbaar onderwijs (dat is de informatie die je krijgt als antwoorder).

> Stel, je neemt twee natuurlijke getallen, $n$ en $m$. Je geeft aan Anna de som van die getallen, en aan Bob de som van de kwadraten. Beiden weten wat er aan de hand is, en beginnen te converseren.
>
> Bob zegt: "Ik weet bij god niet wat die getallen zijn".
> Anna antwoordt: "Ik ook niet".
> Bob zegt: "Ik weet het nog steeds niet".
> Anna antwoordt: "Ik ook nog niet".
> Bob zegt: "Ik weet het nog steeds niet, hoor".
> Anna antwoordt: "Ik ook niet".
> Bob zegt: "Ik weet wat die getallen zijn!"
>
> Wat zijn die twee getallen?

Na enkele dagen was deze vraag nog steeds niet beantwoord, noch toegeeigend, en dus zette ik mij aan het denken. Waarom gaat de conversatie *zes* keer over en weer, en zou het ook werken met vijf keer? Of met vier keer? Of met zeven of acht keer? Wellicht werkt het niet met meer dan zes, want anders zou het raadseltje spectaculairder worden, en dan zou de auteur dat verkozen hebben. Dus zes is het maximum. Ik vraag me af of er zulke raadsels zijn met meer dan zes keer over-en-weer gepraat? Maar eerst deze proberen oplossen.

Joyce was onmiddellijk eerlijk: de vraag kwam uit een boek, en zij wil deze beantwoorden in het kader van haar *Profielwerkstuk Wiskunde*. Ze vermeldde er tevens bij dat haar leraar het antwoord ook niet weet. Dus in feite vraagt ze naar een goede hint, en wat uitleg, en niet direct naar het naakte antwoord. Haar uitleg bewees ook direct dat de vraag *serieus* was, en niet uit de lucht gegrepen. Dus ik begon er, op een avond, over na te denken.

En dat is dus iets wat je nooit mag doen, op een avond beginnen nadenken over zo een interessante vraag. Want je stopt gewoon niet meer, en je nacht is om zeep. Tenzij je het antwoord op een kwartiertje of zo hebt. Maar dat was hier niet het geval, ik geef het onmiddellijk toe. Wat is het probleem met deze "som"? (Joyce is Nederlandse, en daar noemt men een vraagstuk een *sommetje*.) Je begint eraan op een rechtstreekse manier.

Je redeneert: waarom zegt Bob de eerste maal dat hij het niet weet? Ha, omdat zijn getal op meer dan twee manieren te schrijven is als een som van twee kwadraten. We noemen deze eigenschap (K2). Waarom antwoordt Anna dan dat zij het ook niet weet? Ha, omdat haar getal op ten minste twee manieren te schrijven is als een som van twee getallen waarvoor de som der kwadraten eigenschap (K2) heeft. We noemen deze eigenschap (S2). Waarom weet Bob het nog altijd niet? Ha, omdat minstens twee van zijn mogelijkheden een som hebben met eigenschap (S2). We noemen dit eigenschap (K3). Anna weet het nog altijd niet omdat uit haar verschillende mogelijkheden er minstens twee zijn met eigenschap (K3). Dit is eigenschap (S3). Bob weet het niet omdat minstens twee van zijn mogelijkheden eigenschap (S3) hebben (dit is eigenschap (K4), en minstens twee mogelijkheden van Anna hebben eigenschap (K4) (noem dit eigenschap (S4). Maar nu weet Bob het wel, dus slechts één mogelijkheid van Bob heeft eigenschap (S4). Kan je nog volgen? Kan je je een voorstelling geven van wat eigenschap (K4) is, bijvoorbeeld? Ik niet. Het zit te ver in de inductie.

Kunnen we effe achteraan beginnen? Het feit dat Bob het plots weet duidt erop dat de tweede mogelijkheid van Bob wegvalt omdat die zou leiden tot een oplossing voor Anna in de stap ervoor. Aha! Dat is interessant, dus al wat we moeten doen is het raadsel oplossen voor één stap minder. En dus om het raadsel op te lossen voor één stap minder, moeten we het raadsel oplossen voor twee stappen minder, en dan voor drie stappen,... BINGO!, want zoverder gaand zien we dat we dus het raadsel moeten beginnen oplossen voor, zegge, 2 stappen. Dat is te doen. En dan bouwen we inductief verder. Maar dat zou dus betekenen dat we vijf raadseltjes moeten oplossen, en dat die alle vijf een oplossing hebben? Tja, een oplossing inderdaad, maar het is slechts na enkele stappen dat die oplossing uniek wordt. En zelfs verdwijnt na zeven stappen!

En geef toe, dat is toch een eerder curieus fenomeen. Sommen, en sommen van kwadraten, en dan is zes (stappen) het magisch getal voor dat raadseltje? Wiskundige wegen zijn soms ondoorgrondelijk! Ik zal natuurlijk je plezier niet bederven door hier de uitkomst te geven. Die uitkomst heb ik ook niet aan Joyce gegeven; ik gaf enkel wat hints, en na de uitleg van hierboven vond ze zelf de oplossing.

(Ondertussen kwam ik te weten dat er ook een oplossing op internet staat. De methode is anders, en misschien directer. Maar men komt tot dezelfde oplossing, uiteraard!)

Een gerelateerd raadsel is hetvolgende.

> Stel we hebben twee natuurlijke getallen niet kleiner dan 2.
> Anna krijgt opnieuw de som, Bob krijgt het product deze keer.
>
> Bob zegt: "Ik ken deze getallen niet".
> Anna antwoordt: "Ik ook niet".
> Bob zegt: "Ik nu wel".
>
> Welke zijn die getallen?

Dit raadsel is wel van een iets hoger wiskundig gehalte, want de juiste oplossing veronderstelt dat het Vermoeden van Goldbach correct is. Goldbach vermoedde dat elk even natuurlijk getal groter dan 2 de som is van twee priemgetallen. Indien we dit vermoeden niet willen gebruiken moeten we ons raadsel beperken tot een zekere bovengrens, bijvoorbeeld we onderstellen dat beide getallen kleiner zijn dan een miljoen.

Een variant daarop gebruikt dezelfde gegevens, maar de conversatie gaat als volgt:

> Bob zegt: "Ik ken deze getallen niet".
> Anna antwoordt: "Ik wel".
> Bob zegt: "Ik nu ook".

Voilà, dit zijn enkele plezante sommen om jullie bezig te houden tijdens komende vrije dagen, of terwijl je wacht op een vertraagde of afgeschafte trein. Er zijn nog tal van variaties op dit thema, maar we kunnen niet eeuwig doorgaan. Wie echter interessante analoge sommen kent, mag het mij altijd laten weten (per email: `hvm@cage.UGent.be`). Of een berichtje plaatsen op `www.ikhebeenvraag.be` …

HVM

# De bacheloropleiding: mee met haar tijd...

MET DE BAMAHERVORMING in 2004, wanneer de vierjarige wiskundeopleiding een vijfjarige werd, is heel wat veranderd: een brugvak *Relaties en structuren* om de overgang tussen secundair en hoger onderwijs vlotter te laten verlopen, meer project- en presentatievakken, grote flexibiliteit in de masteropleiding... Sindsdien zijn bachelor- en masteropleiding nog bijgeschaafd tot wat ze anno 2013 geworden zijn. We geven een overzicht van wat er sinds 2004 veranderd is aan het verplichte bachelorprogramma. Meer gedetailleerde informatie over het programma is te vinden op de vernieuwde website van de opleiding: `www.wiskunde.ugent.be`.

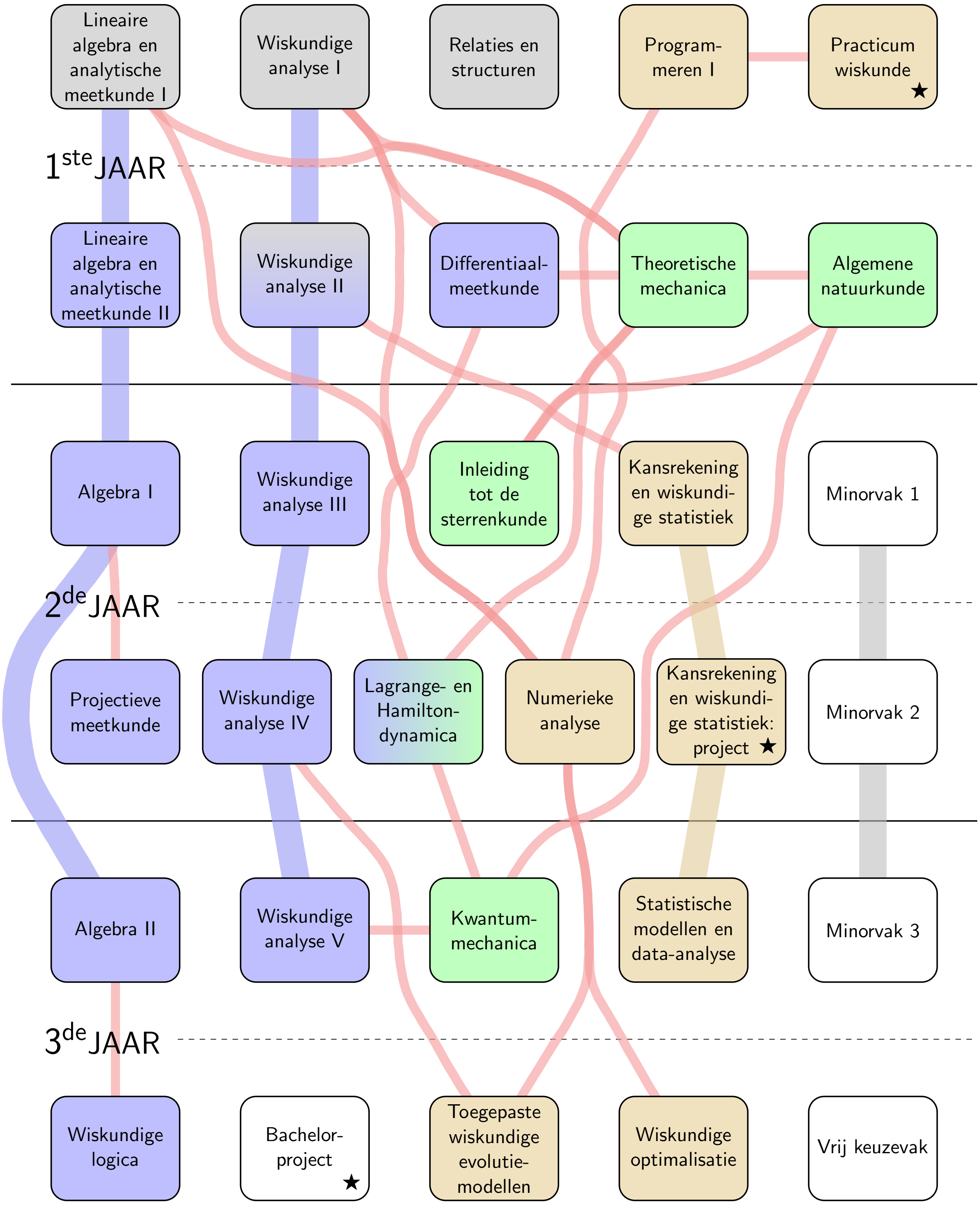
Een grafische voorstelling van het huidige programma vind je op de pagina hiernaast. De rijen staan voor de opeenvolgende semesters. De dikke lijnen zijn leerlijnen, de dunne inhoudelijke verbanden. Vakken uit de projectlijn, waar samenwerken en communiceren aan bod komen, zijn aangeduid met een ster (zie `www.wiskunde.ugent.be/UGent/samenhang` voor een uitgebreidere kleurenversie).

**Herinvulling van de optievakken** Toen in 2003 het nieuwe bachelorprogramma moest uitgetekend worden, wist men nog niet of de masteropleiding een of twee jaar zou duren! Om rekening te houden met een mogelijk eenjarig masterprogramma werd al in het bachelorprogramma een keuzecluster van drie optievakken ingebouwd, te kiezen uit negen vakken. In de masteropleiding werd dan rekening gehouden met de gevolgde vakken en moesten studenten andere basisvakken kiezen.

Om problemen met vrijstellingen te vermijden, werd in 2010 afgestapt van dit systeem van optievakken. Bij de invulling van 18 studiepunten in het derde bachelorjaar met verplichte vakken, werden o.a. hiaten weggewerkt die opdoken bij een rondvraag onder studenten.

We posteerden het vak *Wiskundige logica*, dat toen in de master zuivere wiskunde gegeven werd, in de bacheloropleiding, omwille van zijn algemeen inleidend karakter. Het vak *Wiskundige optimalisatie* werd herwerkt met elementen uit de combinatorische grafentheorie en geïntroduceerd als plichtvak in de bacheloropleiding, wegens zijn centrale rol in de toegepaste wiskunde. Op vraag van de studenten werd gekozen om een vrij keuzevak te introduceren, te kiezen uit alle bachelorprogramma's van alle Vlaamse universiteiten, zoals ook het geval is in de bacheloropleidingen *informatica* en *fysica en sterrenkunde*.

# Bachelor Wiskunde



**Analyselijn** De vakinhouden van *Wiskundige analyse IIb* en *Wiskundige analyse III* werden omgewisseld. Maattheorie wordt nu op een half semester gegeven in *Wiskundige analyse IIb* en het hele vak *Wiskundige analyse III* wordt ingevuld met Complexe analyse. Er is ruimte om de theorie van holomorfe functies breder te ontwikkelen en verbanden met andere vakgebieden aan te geven.

Het vak *Wiskundige analyse IV* dat gaat over genormeerde en metrische ruimten, behandelt sinds 2011 ook basiselementen van topologie, net omdat het ex-optievak *Topologie en algebraïsche topologie* uit de bacheloropleiding verdween.

**Algebralijn** Door de plaatsing van *Groepentheorie* in het tweede bachelorjaar kwam de algemene theorie van ringen en velden in *Algebra* in het derde jaar vrij laat. Dit was nadelig voor vakken als *Projectieve meetkunde*, maar ook voor studenten die een bachelorproject in de algebra wilden maken. De vakinhouden van *Groepentheorie* en *Algebra* werden opnieuw samengesteld, voor een betere opvolging. De aldus ontstane vakken heten *Algebra I* en *Algebra II*.

**Dynamische systemen** Met het pensioen van Willy Sarlet verdween ook zijn vak *Inleiding tot dynamische systemen* uit tweede bachelor van het toneel. Kwalitatieve analyse van stelsels differentiaalvergelijkingen, met klemtonen op stabiliteitseigenschappen en bifurcatietheorie, wordt nu behandeld in *Toegepaste wiskundige evolutiemodellen* in derde bachelor.

Het Lagrange- en Hamiltonformalisme voor mechanische systemen, wat de andere helft van de dynamische-systemencursus uitmaakte, komt nu aan bod in een nieuw wiskundevak over variatierekening, vectorvelden, symmetrieën van differentiaalvergelijkingen en uitwendige calculus van differentiaalvormen. De titel van het nieuwe vak is *Lagrange- en Hamiltondynamica*, maar ondanks de natuurkundig aandoende titel dekt het dus een wiskundige lading. Het vak wordt dan ook niet aangeboden in de opleiding *fysica en sterrenkunde*.

*Inleiding tot de sterrenkunde* verschuift van het tweede naar het eerste semester van het tweede jaar en *Lagrange- en Hamiltondynamica* komt in het tweede semester.

**De bachelorminoren** In de vijf minoren (biowetenschappen, economie, informatica, natuurkunde en wiskunde) rommelde het ook wat: vanaf 2013-2014 zal de minor economie het vak *Speltheorie* kennen in plaats van *Econometrie*.

Ook voor de minor informatica zal een programmawijziging ingaan vanaf volgend academiejaar: *Formele logica* en *Algoritmen en datastructuren II* ruimen dan plaats voor *Multimedia* en *Databanken*, om wiskundestudenten beter voor te bereiden op de masteropleiding wiskundige informatica en op een informaticajob.

In de minor wiskunde werd *Liegroepen en Lie-algebra's* verwijderd, zodat de lijst minorwiskundevaktitels nu bijzonder esthestisch klinkt:
Codeertheorie - Getaltheorie - Grafentheorie - Speltheorie.

**Computeralgebrapakket Sage** In *Practicum wiskunde* worden studenten vertrouwd gemaakt met LaTeX en een computeralgebrapakket. Sinds 2011 is dit niet meer Maple, maar Sage (`www.sagemath.org/`). Ondertussen heeft dit project een aanzienlijke internationale verspreiding gevonden en ook het opensourcekarakter spreekt in het voordeel van Sage. De lesgevers gebruiken Sage als voorkeursalgebrapakket in de opleiding.

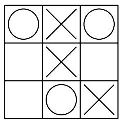
**Veranderingen in lesgevers** Met de pensioneringsgolf die de vakgroep Wiskunde (voorheen 'Zuivere Wiskunde en Computeralgebra') gekend heeft, zijn heel wat vakken van docent veranderd. In het eerste jaar bijvoorbeeld, is enkel *Algemene natuurkunde* niet van lesgever veranderd in vergelijking met 2006-2007! Over pensioneringen van proffen lees je meer in een volgende editie van Tussen Haakjes…

Heb je vragen over deze programmawijzigingen, opmerkingen of suggesties om de opleiding te verbeteren? Die zijn allemaal erg welkom in de opleiding en je kunt die richten aan de auteur van dit artikel (`bs@cage.ugent.be`), aan QED of aan de opleidingscommissievoorzitter.

BS

# Boter, kaas, eieren en aanverwante

Iedereen kent wel het spel *Boter, kaas en eieren*: twee spelers vullen om de beurt een vak in een $3 \times 3$-rooster (de eerste speler vult traditioneel telkens een X in en de tweede speler telkens een O). De speler die als eerste een volledige rij (horizontaal, verticaal of diagonaal) kan invullen, wint. Als het bord vol is voordat iemand hierin slaagt, is er een gelijkspel.



Al spelend krijgt men snel het vermoeden dat elk van de spelers een gelijkspel kan afdwingen. Men kan dit inderdaad door een tamelijk kort gevallenonderzoek bewijzen. Laten we een dimensie hoger gaan: boter, kaas en eieren op een $3 \times 3 \times 3$-rooster (zowel de vlakke als de ruimtediagonalen tellen hier als rijen). In dit geval is het niet zo moeilijk om in te zien dat de eerste speler altijd kan winnen (met de eerste zet in het midden van het bord). Kijken we meer algemeen naar een $n \times n \times n$-rooster, dan wordt de situatie al gauw veel minder duidelijk. Voor een $4 \times 4 \times 4$-rooster bestaat er een winnende strategie voor de eerste speler, maar deze is verre van eenvoudig en is met behulp van de computer gevonden in 1977. Dit spel is trouwens leuk om te spelen en wordt ook Qubic genoemd. Men weet voor geen enkele $n \geq 5$ of er een winnende strategie bestaat voor een van de spelers! Het aantal mogelijkheden wordt dan zo groot en onoverzichtelijk dat men spreekt van *combinatorische chaos*.

Zoals steeds wanneer een gegeven probleem te moeilijk blijkt, schakelt een wiskundige dan over op een verwant (hopelijk eenvoudiger) probleem. We vragen ons af of een speler een rij kan maken, maar *niet noodzakelijk als eerste*. We gaan ook het spelbord veranderen: beide spelers kiezen om de beurt een punt in het Euclidische vlak. Bob, de bouwer, wil een rij maken van $n$ punten op eenzelfde rechte waarvan de opeenvolgende punten op afstand 1 van mekaar liggen (we noemen zulke rij een *winnende rij*). Spud, de spelbreker, wil hem dat verhinderen (een punt dat Spud bezet, kan niet meer door Bob ingenomen worden). Bob kan in drie zetten winnen als $n = 3$, en in vijf zetten[1] als $n = 4$. Als $n \geq 5$

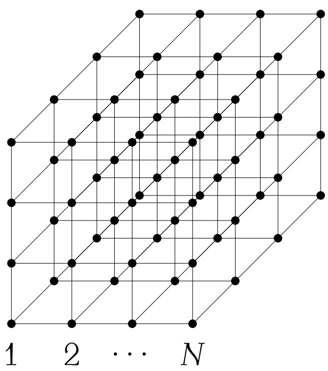
[1] Hint: maak een gelijkzijdige driehoek

is ook voor dit spel de situatie niet meer eenvoudig (we nodigen de lezer uit om pen en papier ter hand te nemen, en even te proberen!).

Toch bestaat er een manier om aan te tonen dat Bob dit spel voor elke $n$ kan winnen. Daartoe moet Bob als volgt spelen: Bob kiest in gedachten een verzameling

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^{m} d_i v_i : d_i \in \mathbb{N}, 1 \leq d_i \leq N \right\}$$

in het vlak, waarbij $m$ en $N$ natuurlijke getallen zijn (die groot genoeg zullen moeten zijn om de strategie te doen werken). De vectoren $v_i$ zijn eenheidsvectoren in het vlak, en kunnen zo gekozen worden dat alle combinaties $\sum_{i=1}^{m} d_i v_i$ verschillende punten in het vlak opleveren, zodat $X$ juist $N^m$ punten bevat. $X$ is de vlakke projectie van de roosterpunten van een $m$-dimensionaal rooster, geprojecteerd op het vlak (figuur voor $m = 3$):




$X$ is zo gekozen dat er veel verschillende winnende rijen in voorkomen: elk lijnstuk van het $m$-dimensionale rooster bevat $N$ punten, en dus $N-n+1$ winnende rijen (als $N \geq n$). Er zijn zo $N^{m-1}m$ verschillende lijnstukken. In totaal bevat $X$ dus minstens $(N - n + 1)N^{m-1}m$ winnende rijen.

Bij elke zet speelt Bob nu dat punt van $X$ waardoor de zgn. *opportuniteit*

$$T = 2^n l_n + 2^{n-1} l_{n-1} + \cdots + 2l_1 + l_0$$

zo groot mogelijk wordt. Hierbij is $l_k$ het aantal winnende rijen in $X$ die juist $k$ punten van Bob bevatten (na het spelen van de zet), en nog geen enkel punt van Spud. Intuïtief is een zet voor Bob immers opportuun als daardoor veel winnende rijen aangevuld worden waarvan Bob al veel punten bezet (en Spud nog geen enkel). Een telargument van Erdős en Selfridge uit 1973 toont aan dat Bob met deze strategie zeker gewonnen heeft op het moment dat alle punten van $X$ bezet zijn, op voorwaarde dat

$$\text{het aantal winnende rijen in } X > 2^{n-3}(n-1) \times \text{het aantal punten van } X,$$

m.a.w. zodra

$$\left(1 - \frac{n-1}{N}\right) m > 2^{n-3}(n-1).$$

Door $N$ en $m$ groot genoeg te kiezen kunnen we hier zeker voor zorgen. Voor $n = 5$ volstaat bijv. $N = 21$ en $m = 20$.

Deze strategie is duidelijk niet de meest efficiënte (zo wordt bijv. een winnende zet niet noodzakelijk onmiddellijk gespeeld). We zijn ook pas zeker dat Bob wint na pakweg $N^m$ zetten! Men vermoedt dat Bob allicht al na een duizendtal zetten zou moeten kunnen winnen als $n = 5$ of $n = 6$, maar het blijkt zeer moeilijk om een strategie te vinden die ook maar in de buurt van zulk aantal zetten komt. Anderzijds kan de hierboven beschreven strategie eenvoudig uitgebreid worden tot een winnende strategie voor hetzelfde bouwspel, maar waarbij een *winnende rij* vervangen wordt door een *winnende verzameling* die gelijk welke eindige deelverzameling van het vlak kan zijn! We verwijzen de geïnteresseerde lezer naar de literatuur [1].

HV

# Referenties

[1] J. Beck, Combinatorial Games, Tic-Tac-Toe Theory, Cambridge University Press, 2008.